

MARTIN GARDNER

Alte amuzamente matematice

OG

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ București, 1970

TRADUCEREA DE ALEX. BUTUCELEA COPERTA DE VAI, MUNTEANTJ

MARTIN GARDNER'S

New Mathematical Diversions from Scientific American Simon and Schuster, New York, 1966 Copyright ©

1966 by Martin Gardner

Evolvy met

TO Iv. R. AHCROF,

emitero meno*

* Citiți în sens invers:

One more time, for Charlotte, my love

— încă o dată, Charlottei, dragostea mea

PREFAȚĂ

„0 glumă matematică bună — scria matematicianul englez John Edensor Littlewood în Introducerea la cartea sa Matematician's Miscellany¹ — valorează mai mult decât o duzină de lucrări mediocre și este totodată și matematica cea mai bună”.

Aceasta este o carte de glume matematice, dacă dăm cuvintului „glumă” un sens mai larg, incluzând în el orice problemă matematică în care intră un procent considerabil de amuzament. Sînt foarte mulți matematicieni care savurează o astfel de distracție, bineînțeles fără să depășească o limită rezonabilă. Există în recreațiile matematice un fel de fascinație, care, la unii, devine un fel de intoxicație. Eroul renumitului roman despre șah al lui Vladimir Nabokov, *The Defense* (Apărarea), este un astfel de om. El a permis șahului (care este o formă de joc matematic) să-i domine atît de complet mintea, încît în cele din urmă a pierdut contactul cu lumea reală și și-a sfîrșit viața nenorocită prin ceea ce șahiștii înșiși numesc un automat — s-a aruncat pe fereastră. Nu lipsit de legătură cu lenta descompunere a eroului lui Nabokov este faptul că la școală acesta fusese chiar și la matematică un elev slab, dar în același timp „complet absorbit de culegerea de probleme Matematica fericită, de fantastică și ciudata comportare a numerelor și de zburdălnicia capricioasă a liniilor geometrice, de tot ceea ce lipsea din manual”.

1 J. E. Littlewood, *Varietăți matematice*, Editura Enciclopedică Română, București, 1969. — N.R.

1

Morala: amuzati-vă cu jocuri matematice, dacă vă simțiți tentat de ele — dar nu le savurați prea intens; permiteți-le să vă procure doar vacanțe ocazionale. Folosiți-le pentru a vă stimula interesul pentru știința solidă și matematica serioasă. Dar țineți-le sub control sever.

Iar dacă nu le puteți ține sub control, amintiți-vă de nuvela lordului Dunsany², Jucătorul de șah, afaceristul și altul. Un om de afaceri își amintește de un prieten cu numele Smoggs, care fusese cîndva pe cale să devină un strălucit om de afaceri, pînă cînd s-a lăsat captivat de șah. „La început totul s-a petrecut treptat: pe vremea cînd lucram amîndoi la aceeași firmă obișnuia să joace șah cu un prieten la ora primului. După un timp, a început să-și bată partenerul. . . Apoi a intrat într-un club de șah și părea cuprins de un fel de fascinație; ceva în felul beției, sau mai curînd ca poezia sau muzica... Ar fi putut fi om de afaceri! Se spune că asta nu e mai greu decât să joci bine șah, deși șahul nu duce la nimic. N-am văzut niciodată un creier irosit mai pe degeaba.

— Mai sînt și oameni din ăstia. E păcat. . ., zise gardianul închisorii. După care zăvori din nou ușa celulei omului de afaceri”.

Mulțumesc încă o dată revistei „Scientific American” pentru permisiunea de a retipări cele 20 de articole cuprinse în carte. Ca și în precedentul volum, articolele au fost adăugite, erorile au fost corectate și a fost introdus destul de mult material nou, trimis de cititori. Sînt recunoscător, de asemenea, soției mele pentru ajutorul dat în revederea șpalturilor și editorului, Nina Bourne. Și mai presus de toate, echipei mereu în creștere de cititori, răspîndiți pe tot cuprinsul țării și al lumii, ale căror scrisori binevenite au îmbogățit atît de mult materialul retipărit aici.

MARTIN GARDNER

2 Dramaturg, poet și eseist irlandez, 1878—1957. — N.T.

CAPITOLUL I

Sistemul binar

O hîrtiuță roșie stătea prinsă între parbriz și ștergătorul de parbriz; am rupt-o meticolos în două, patru, opt bucăți.

Vladimir Nabokov, *Lolita*

Sistemul numeric folosit astăzi în lumea civilizată este un sistem zecimal, bazat pe puterile succesive ale lui 10. Cifra din extrema dreaptă a oricărui număr reprezintă un multiplu al lui 10^0 , adică al lui 1. A doua cifră din dreapta indică multiplii lui 10^1 ; a treia — un multiplu al lui 10^2 și așa mai departe. Prin urmare, numărul 777 exprimă de fapt suma $(7 \times 10^0) + (7 \times 10^1) + (7 \times 10^2)$. Răs-pîndirea largă a numărului 10 ca bază a sistemului

de numărare se datorează fără doar și poate faptului că avem 10 degete la mâini; chiar și denumirea cifrei în limba engleză, și anume digit, reflectă această origine. Iar dacă pe Marte trăiesc ființe inteligente cu câte 12 degete, am putea paria cu multe șanse de succes că aritmetica marțiană folosește o notație bazată pe puterile lui 12.

Cel mai simplu dintre toate sistemele numerice care folosesc poziția cifrelor este sistemul binar, bazat pe puterile lui 2. Există unele triburi primitive care socotesc după sistemul binar, iar vechii matematicieni chinezi știau și ei multe lucruri despre acest sistem; se pare că marele matematician german Gottfried Wilhelm von Leibniz este cel care a dezvoltat mai detaliat sistemul. Pentru el, sistemul reprezenta un adevăr metafizic profund : Leibniz considera cifra 0 ca pe un simbol al non-existenței, al neîntinderii, iar pe 1 ca pe un simbol al existenței, ambele necesare Creatorului, fiindcă un Cosmos care ar conține numai substanță pură u-ar putea fi deosebit de unul absolut gol, lipsit complet

2

de „zgomot și furie”¹, și simbolizat de cifra 0. Leibniz socotea că așa cum în sistemul binar orice întreg poate fi exprimat printr-o înșiruire adecvată de cifre 0 și 1, tot așa și structura matematică a întregii lumi create devine posibilă ca o consecință a împărțirii binare primordiale între existență și non-existență.

Începând de la Leibniz și până aproape de zilele noastre, sistemul binar nu a reprezentat altceva decât o curiozitate, fără valoare practică. Dar iată că și-au făcut apariția calculatoarele electronice! Conductorii electrici conduc sau nu conduc curentul electric, un întrerupător este în poziția „închisă” sau „deschisă”, un magnet poate fi orientat nord-sud sau sud-nord, iar un circuit flip-flop² de memorizare nu poate avea decât două stări alternative. Pentru aceste motive, construind calculatoarele care prelucrează date codificate sub formă binară, se obțin viteze de calcul enorme și precizii uluitoare. „Vai! — exclama Tobias Dantzig în cartea sa Numărul — limbajul științei — ceea ce altă dată reprezenta un monument înălțat monoteismului s-a transformat astăzi în măruntaiele unui robot”.

Multe amuzamente matematice se bazează pe sistemul binar: jocul Nim, unele jocuri mecanice, ca Turnul din Hanoi sau Inelele lui Cardan, precum și nenumărate trucuri cu cărți sau enigme distractive. Ne vom mărgini atenția aici la o serie familiară de trucuri de „ghicire” a cărților, precum și la un joc înrudit, cu cartele perforate, cu care se pot realiza câteva performanțe binare remarcabile.

Confecționarea cartelelor „de ghicit numere” este clară din fig. 1. În partea stângă se înscriu în sistemul binar toate numerele de la 0 la 31. Fiecare cifră dintr-un număr binar reprezintă o putere a lui 2, începând cu 2⁰ (adică 1) la extremitatea din dreapta, și continuând apoi spre stânga cu 2¹ (adică 2), 2², 2³ etc. Puterile lui 2 sînt indicate la capătul de sus al fiecărei coloane. Pentru a transforma un număr binar în echivalentul său zecimal, se însumează pur și simplu puterile lui 2 care sînt indicate de poziția cifrei 1. Astfel, 10101 reprezintă 16 + 4 + 1, adică 21. Pentru a-1 scrie din nou pe 21 sub formă binară, se folosește procedeul invers. Se împarte 21 la 2; rezultatul este 10, iar restul 1; acest rest este prima cifră de la dreapta numărului binar; se împarte apoi 10 cu 2; în acest caz nu rămîne nici un rest — așa că următoarea cifră binară este 0; după aceasta se împarte 5 prin 2 și așa mai departe pînă ce se scrie întreg numărul binar 10101. În ultimul pas, 2 se cuprinde în 1 de zero ori, cu restul 1.

1 Aluzie la romanul *The Sound and the Fury* al scriitorului american William Faulkner (1929). - N.T.

2 Circuit flip-flop — un circuit electronic care are două condiții stabile, fiecare corespunzînd unuia din cele două semnale de intrare alternative. — N.T.

2

Tabelul numerelor binare este transformat într-un set de cărți „de ghicit numere”, înlocuind pur și simplu fiecare cifră 1 cu numărul zecimal care corespunde numărului binar în care apare acest 1. Rezultatul este trecut în partea dreaptă a figurii. Fiecare coloană de numere este copiată pe o carte separată. Înmînați cuiva cele cinci cărți, cerîndu-i să se gîndească la oricare număr cuprins între 0 și 31 și apoi să vă dea înapoi toate cărțile în care apare acest număr. Veți putea găsi numărul fără a sta prea mult pe gînduri: pentru a-1 afla, nu aveți decât să adunați numerele din partea de sus a cărților pe care vi le-a dat înapoi.

Care este esența acestui „truc”? Fiecare număr apare pe singura combinație de cărți, iar această combinație este echivalentă cu notația binară a numărului. Atunci cînd adunați numerele din partea de sus a cărților, adunați de fapt puterile lui 2 care sînt indicate de cifrele 1 din varianta binară a numărului ales. Mecanismul jocului poate fi ascuns și mai bine folosind cărți de cinci culori diferite. În acest caz, ați putea sta de partea cealaltă a camerei, rugînd pe partener să introducă toate cărțile pe care se află numărul ales într-unui din bu

NUAERE BINARE

CARTELE DE «GHICIT»

	5	8	4	7	1	f		1		—si—ir~i
0					0	1	I	■		ii ' j
1					1	1	I	\		ii' j
2				1	0	1				

3				1	1	I	j	(* 3i 41 i
4			1	0	0		i	U 1
5			1	0	1			s! !! 51]]
6			1	1	0		-	6 u «;
7			1	1	1			
8			1	0	0			li 1
9			1	0	0	I	a	r' i g j i si t
10			1	0	1			illOij j
11			1	c	1		ti	
12			1	1	0		ta	,Zil- 1
13			1	1	0		[13]	13 \m
14			1	1	1		14	I4 14J
15			1	1	1	i	15j ;15j 15i 15	
16	1		0	0	0	13]	!	\ 1 i
17	1	0	Q	0	1	17	\	:
18	1	0	0	1	0	18	1	! »« t :
19	1	0	0	1	0	19	1	1 ,8 [1s.
20	1	0	1	0	0	20	20	j i
21	1	0	1	0	1	21	I	
22	1	0	1	1	0	22	\	
23	1	0	1	1	1	23	i 2? 1	
24	1	1	0	0	0	24	J24 S \i ii 1	
25	1	1	0	0	1	25	\t% S25 w	
26	1	1	0	1	0	26	2S a*	
27	1	1	0	1	1	27	2? 27	
28	1	1	1	0	0	28	28 •28. i	
2S	1	1	1	0	1	28	29 r»!j ! 2ft]	
3C	1	1	1	1	0	30	sc-	30
31	1	1	1	1	1	31	ai 3< !'-«f[[f»« fii	

Fig. 1 Numerele înscrise pe un set de cartele, „de ghicit numere" (dreapta) se bazează pe sistemul binar (stingă).
3

zunare, iar pe toate celelalte în alt buzunar. Fără îndoială, va trebui să vă amintiți cu care culoare a fost asociată fiecare putere a lui 12. O altă variantă ar fi să aranjați cele cinci cărți (de aceeași culoare, de data aceasta) într-un singur rând pe masă. Treceți în partea' cealaltă a camerei și cereți partenerului să întoarcă cu fața în jos acele cărți pe care se află înscris numărul ales. Deoarece ați avut grijă să aranjați cărțile într-o anumită ordine a numerelor lor din partea superioară, pentru a „ghici" numărul ales nu aveți decît să observați care dintre cărți au fost întoarse.

Fundamentul binar al sistemului de sortare pentru cartele perforate este ilustrat în mod amuzant în fig. 2. Cele 32 de cartele pot fi confecționate ușor din fișe de bibliotecă. Găurile trebuie să fie ceva mai mari decît diametrul unui creion. Este recomandabil ca după ce au fost practicate cinci găuri în una din fișe, aceasta să fie folosită ca un șablon pentru fixarea poziției găurilor la toate celelalte fișe. Dacă nu aveți la îndemînă o mașină de găurit de birou, puteți folosi un foarfece, tăind diutr-o dată cîte trei fișe. Colțul tăiat ajută la păstrarea cartelelor cu o orientare dată. După ce în fiecare cartelă au fost practicate cele cinci găuri, marginea acestora din urmă este tăiată în anumite poziții, ca în figură. Aceste găuri deschise vor reprezenta cifra 1, pe cînd cele închise, cifra 0. în felul acesta, fiecare cartelă este purtătoarea echivalentului unui număr binar. Numerele sînt de la 0 la 31, însă pe figură cartelele sînt distribuite la întîmplare. Cu acest arsenal se pot executa trei „scamatorii" ; chiar dacă par oarecum greu de făcut, ele nu vor amuza mai puțin pe fiecare membru al familiei.

Prima dintre scamatorii constă în a sorta rapid cartelele, în așa fel încît numerele să apară într-o ordine serială.

Amestecați cartelele în orice mod preferați, apoi adunați-le pachet; introduceți un creion prin gaura E și ridicați-l cu câțiva centimetri. Jumătate dintre cărți se vor ridica o dată cu creionul, iar cealaltă jumătate vor rămâne pe masă; scuturați creionul de câteva ori ca să fiți siguri că toate cartelele pe care se contează să cadă au căzut, apoi ridicați mai departe creionul pînă cînd cartelele se separă în două jumătăți. Scoateți cartelele de pe creion și așezați pachetul astfel format deasupra celui alt pachet. Repetați operația cu fiecare dintre găuri, de la dreapta la stînga. După cea de a cincea operație de sortare, s-ar putea să vă surprindă chiar și pe dumneavoastră găsind că numerele binare se află acum în ordine serială, începînd cu 0 pe cartela din față. Nu vă mai rămîne decît să răsfoiți acum cartelele una cîte una și să citiți un anumit mesaj dinaintea scris acolo!

Cea de-a doua scamatorie folosește cartelele în același fel ca un calculator programat să selecteze un anumit număr dintr-un set

4

Fig. 2 Un set de cartele perforate, care pot ajuta la descifrarea unui mesaj, la ghicitul unui număr sau la rezolvarea unor probleme de logică.

de cartele „de ghicit numere”. Începeți cu amestecarea cartelelor. Inserați creionul în gaura E și întrebați dacă numărul ales se află sau nu pe cartela care are în partea de sus numărul 1. Dacă/răspunsul este Da, ridicați creionul și înlăturați toate cartelele care Ant ridicate o dată cu el. Dacă Nu, înlăturați toate cartelele care cad/Aveți acum un pachet de 16 cartele. întrebați dacă numărul se află pe cartela care are numărul 2 în partea de sus, apoi repetați operația cu creionul în gaura D. Continuați în acest fel cu cartelele și găuri/e rămase. Veți sfîrși cu o singură cartelă perforată — iar numărul ei binar este tocmai numărul ales. Dacă doriți, însemnați numere zecimale pe toate cartelele, pentru ca să nu mai fie nevoie să traduceți/ numerele binare.

În sfîrșit, cea de-a treia scamatorie, dacă o mai putem numi așa, folosește cartelele în același fel ca un calculator logic, după un procedeu descris pentru prima oară de William Stanley Jevons, un economist și logician englez. „Abaca logică” a lui Jevons folosea piese plate de lemn, prevăzute pe spate cu cuie de oțel pentru a putea fi ridicate de pe masă; cartelele perforate operează exact în același fel, dar sînt cu mult mai simplu de construit. Jevons a mai inventat și un instrument mecanic complex, numit de el „pianul logic”, care funcționează pe aceleași principii, dar tot ce știe să facă pianul lui, reușesc să facă și cartelele; de fapt, chiar ceva mai mult, pentru că pianul ține seama numai de patru termeni, pe cînd cartelele de cinci.

Cei cinci termeni A, B, C, D și E sînt reprezentați de cele cinci găuri care, la rîndul lor, reprezintă cifre binare. Fiecare 1 (sau gaură deschisă) corespunde unui termen adevărat, iar fiecare 0, unui termen fals. O bară trasată deasupra unei litere indică faptul că termenul este fals, iar o literă nebarată indică un termen adevărat. Fiecare cartelă este o combinație unică de termeni adevărați și falși, și întrucît cele 32 de cartele epuizează toate combinațiile posibile, ele sînt echivalentul a ceea ce a căpătat numele de „tabel al adevărului” pentru cei cinci termeni. Funcționarea cartelelor poate fi explicată cel mai bine arătînd cum pot fi ele folosite la rezolvarea unei probleme de logică cu două valori.

Într-o cărticică publicată recent de firma „Litton Industries” din Beverly Hills (California), Alte recreații ambigue, a apărut următoarea problemă amuzantă: „Dacă Sara n-ar fi, atunci Wanda ar vrea. Este imposibil ca afirmațiile: «Sara ar fi» și «Camille n-ar putea» să fie adevărate amîndouă simultan. Dacă Wanda ar vrea, atunci Sara ar fi și Camille ar putea. Prin urmare Camille ar putea. Este oare această concluzie valabilă?”

Pentru a rezolva această problemă, să pornim cu cartelele perforate aranjate într-o ordine oarecare. Întrucît sînt implicați numai trei termeni, ne vom preocupa numai de găurile A, B și C.

4

\ A = Sara ar fi

\ A = Sara n-ar fi

\ B = Wanda ar vrea

\ B = Wanda n-ar vrea

\ C = Camille ar putea

\ C = Camille n-ar putea

Problema are trei premise. Prima — „Dacă Sara n-ar fi, atunci Wanda ar vrea” — ne spune că combinația \bar{A} împreună cu B nu este admisă, așa | că va trebui să eliminăm toate cartelele care poartă această combinație. Aceasta se face în felul următor. Inserați creionul în A și ridicați-1. Toate cartelele care rămîn pe creion poartă \bar{A} ; păs-trați-le ca un grup separat, scoateți creionul, inserați-1 în B și ridicați-1. El va ridica toate cartelele purtînd atît A cît și B, combinație nead-misă, așa că aceste cartele trebuie înlăturate. Toate cartelele care rămîn sînt adunate din nou pachet (ordinea nu contează nici de data asta) și sînteți acum gata pentru cea de-a doua premisă.

Aceasta spune că afirmațiile „Sara ar fi” și „Camille n-ar putea” nu pot fi amîndouă adevărate simultan. Cu alte cuvinte, nu putem admite combinația AC. Inserați creionul în A și ridicați cartelele purtînd A. Acestea nu sînt cartelele pe care le dorim, așa că le punem pentru moment deoparte și continuăm cu grupul A care rămîne. Introduceți creionul în C și ridicați cartelele C. Acestea poartă combinația nevalabilă AC, așa că je puteți îndepărta de-a binelea. Adunați din nou cartelele rămase.

Ultima premisă ne spune că dacă Wanda ar vrea, atunci Sara ar fi și Camille ar putea. Un strop de gîndire vă va

arăta că această afirmație elimină două combinații: $\bar{A}B$ și BC . Inserați creionul în A, ridicați și continuați operațiile cu cărțile ridicate. Inserați creionul în B și ridicați. Nici o cartelă nu va fi ridicată. Aceasta înseamnă că cele două premise dinainte au eliminat deja combinația AB. Întrucât toate cartelele poartă combinația nevalabilă AB, întregul pachet este înlăturat definitiv. Ultima operație care mai rămîne este de a elimina BC dintre cartelele rămase. Creionul introdus în B va ridica cartelele B, care se pun deocamdată la o parte. Introducînd creionul în gaura C a cartelelor care rămîn, veți constata că nici o cartelă nu se ridică, ceea ce înseamnă că BC, o combinație nevalabilă, a fost eliminată încă din etapele anterioare.

Ne rămîn așadar opt cartele, purtînd fiecare cîte o combinație de valori adevărate pentru A, B și C, care este compatibilă cu toate cele

5

trei premise. Aceste combinații constituie rîndurile valabile Ale unui tabel al adevărului pentru toate premisele combinate. Examinarea cartelelor arată că C este adevărată pe toate opt — așa că este pe deplin justificat să conchidem: Camille ar putea. Am mai putea trage și alte concluzii pe baza premiselor enunțate. Putem afirma, de pildă, că Sara ar fi. Dar deosebit de interesantele probleme: Ar/vrea Wanda, sau nu? Sau: Ce anume ar vrea? rămîn, cel puțin în limitele informației de care dispunem, un mister binar de nepătruns.

Pentru cei care doresc să folosească cartelele pentru rezolvarea altor probleme, dăm aici una foarte simplă. /

Dl. Abner, soția sa Beryl și cei trei copii, Cleo, Dale și Ellsworth stau împreună într-o seară de iarnă.

1. Dacă dl. Abner privește la televizor, la fel face și soția sa;
2. Fie Dale, fie Ellsworth, fie amîndoi, privesc la televizor;
3. Fie Beryl, fie Cleo, dar nu amîndoi, privesc la televizor;
4. Dale și Cleo, fie că privesc, fie că nu privesc — dar asta numai împreună.
5. Dacă Ellsworth privește la televizor, atunci dl. Abner și Dale privesc și ei.

Cine privește la televizor, și cine nu?

ADAOS

E. B. Grossman, din New York, mi-a scris pentru a-mi comunica că pe piață au apărut între timp o mare varietate de cartele comerciale pentru îndosărierea și sortarea binară. Găurile sînt gata perforate, dar sînt prea mici pentru un creion; se pot totuși folosi andrele, cuie, sîrme sau vergele special făcute, care pot fi și ele cumpărate.

Giuseppe Aprile, profesor la Universitatea din Palermo (Italia), mi-a trimis cele două fotografii din fig. 3. O separare rapidă și lipsită de erori a cartelelor se poate face prevăzînd un al doilea rînd, complementar, de găuri și de găuri tăiate la partea inferioară a acestora. Ancorînd găurile complementare de la partea de jos, putem ușura sortarea atunci cînd tragem cartelele cu ajutorul găurilor de sus.

5

Fig. 3 Un rînd suplimentar de găuri în partea inferioară a cartelelor permite sortarea fără greșeli.

RĂSPUNSURI

Problema logică poate fi rezolvată cu ajutorul cartelelor perforate după cum urmează: Să presupunem că literele A, B, C, D și E reprezintă, respectiv pe dl. Abner, Beryl, Cleo, Dale și Ellsworth. Un termen este considerat adevărat atunci cînd persoana respectivă privește la televizor și fals în caz contrar. Premisa 1 elimină toate cartelele care poartă AB; premisa 2 elimină DE; premisa 3 elimină BC și BC; premisa 4 elimină CD și CD; iar premisa 5 elimină AE și DE. Rămîne o singură cartelă — aceea care poartă combinația ABCDE. Conchidem deci că Cleo și Dale privesc la televizor, pe cînd ceilalți își văd de treburi.

CAPITOLUL II

Teoria grupurilor și împletiturile

Noțiunea de „grup” — una dintre marile idei unificatoare ale algebrei moderne și o unealtă indispensabilă în fizică — a fost asemuită de James R. Newman cu surîsul pisicii din Chesliere¹. Corpul pisicii (adică algebra în forma în care este învățată de obicei) dispare, lăsînd în urmă doar un surîs abstract. Dar, un surîs implică ceva amuzant. De aceea, poate că dacă n-o vom lua prea în serios vom reuși să facem teoria grupurilor ceva mai puțin misterioasă.

Trei programatori de la un calculator electronic, Ames, Baker și Coombs, doresc să hotărască cine va plăti berea pe care o vor bea la terminarea lucrului. Desigur, ar putea arunca cu banul, însă ei preferă o decizie mai complicată, bazată pe următorul principiu. Pe o foaie de hîrtie se trag trei linii verticale. Unul dintre programatori, ținînd hîrtia astfel încît colegii săi să nu vadă ce face, etichetează la întîmplare cele trei linii cu A, B și C (vezi fig. 4, stînga). Apoi îndoiaie partea de sus a foii în așa fel, încît să ascundă aceste litere. Al doilea programator desenează o serie de linii orizontale întîmplătoare — să le numim traverse — care leagă liniile verticale două cîte două (vezi cel de-al doilea desen al figurii). În sfîrșit, cel de-al treilea programator mai adaugă și el cîteva traverse, apoi marchează cu un X capătul de jos al uneia din liniile verticale (al treilea desen).

1 „A zimții ca o pisică din Cheshire” — a zimbi enigmatic. Expresia, foarte răspîndită, își trage originea de la pisica veșnic zînbitoare din cartea lui Levriss Carroll, Alice în țara minunilor. — N.T.

5

C A B

! H I I

X

Fig. 4 Un joc cu linii.

6

Foaia este apoi desfăcută. Ames pune degetul la partea de sus a liniei A și pleacă pe ea în jos ; când ajunge la capătul unei traverse (ignorînd traversele peste mijlocul cărora se întîmplă să treacă), se întoarce, urmărește traversa către capătul celălalt, se întoarce iarăși și continuă mersul în jos pînă cînd întîlnește capătul altei traverse. O tot ține așa pînă atinge marginea de jos. Drumul urmat de el (ilustrat de linia întreruptă din ultimul desen al fig. 4) nu se termină la semnul X — așa că Ames poate răsufla ușurat că nu va avea de plătit berea. Acum este rîndul lui Baker și Coombs. Primul dintre ei este ghinionist, căzînd exact pe X. Pentru orice număr de linii verticale și indiferent de felul în care sînt desenate liniile orizontale, fiecare dintre jucători va termina drumul pe o linie verticală diferită.

O privire mai atentă la acest joc arată că el este bazat pe unul dintre cele mai simple grupuri — așa-numitul grup al permutărilor pentru trei simboluri. Dar ce înseamnă, mai exact, un grup? Este o structură abstractă, cuprinzînd o mulțime de elemente nedefinite (a, b, c, ...) și o singură operație binară nedefinită (reprezentată aici prin semnul \circ), care împerechează un element oarecare cu un altul pentru a da un al treilea. O astfel de structură nu constituie un grup decît dacă posedă următoarele patru proprietăți:

1. Cînd se combină două elemente ale mulțimii prin operația grupului, rezultatul este un alt element al aceleiași mulțimi. Această proprietate este denumită „închidere”.

2. Operația actuală de „legea asociativității” : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

3. Există un element e (denumit „identitate”), astfel încît $a \circ e = e \circ a = a$.

4. Pentru fiecare element a există un element „invers” a , astfel încît $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Dacă, pe lîngă aceste patru proprietăți, operația ascultă și de „legea comutativității” ($a \circ b = b \circ a$), grupul se numește comutativ, sau abelian.

Cel mai familiar exemplu de grup este furnizat de mulțimea numerelor întregi (pozitive, negative sau zero), în raport cu operația de adunare. Acest grup este închis (orice întreg plus orice întreg dă tot un întreg) ; este asociativ (adunînd 2 cu 3 și apoi adunînd 4 obținem același rezultat ca adunînd 2 cu suma lui 3 cu 4) ; identitatea este numărul 0, iar inversul unui întreg pozitiv este negativul numărului respectiv; grupul este, pe deasupra, și abelian, deoarece 2 plus 3 este tot una cu 3 plus 2. Întregii nu formează însă grup în raport și cu

2 Niels Henrik Abel, matematician norvegian (1802-1829). — N.T.

6

B

B

B

A B

e

B

B

9

3

C

B

B

B

r

B

C

S

A

t

B

Fig. 5 Cele șase elemente ale grupului jocului cu linii.

împărțirea : 5 împărțit prin 2 este $2 \frac{1}{2}$, care nu mai este un element al mulțimii întregilor.

Să vedem acum în ce fel jocul cu liniile de mai înainte are o structură de grup. Fig. 5 ilustrează cele șase „transformări” fundamentale care sînt tocmai elementele grupului nostru finit. Transformarea p schimbă între ele drumurile A și B, astfel încît cele trei drumuri se succed în ordinea BAC. Transformarea 6 nu este de fapt o schimbare, dar matematicienii se încapăținează totuși să o numească „transformare”, tot așa cum și o clasă nulă sau vidă este numită tot clasă. Această transformare constă pur și simplu în a nu desena nici o traversă, ea fiind astfel transformarea „identică” — care de fapt nu

6

schimbă nimic. Aceste șase elemente corespund celor șase moduri diferite în care pot fi permutate trei simboluri date. Operația grupului nostru, simbolizată iarăși prin semnul fc^{\wedge} , constă în a continua o transformare cu o alta — cu alte cuvinte, în a adăuga traverse.

O verificare rapidă arată că avem de-a face aici cu o structură care posedă toate proprietățile grupurilor. Ea este închisă, deoarece, oricum am împerechea elementele, obținem întotdeauna o permutare în ordinea drumurilor, care poate fi obținută și printr-un singur element. De exemplu, $p \cdot i \cdot t = r$, deoarece p continuat cu t are exact același efect asupra drumului ca și aplicarea operației r singure. Operația de adăugare de traverse este, evident, asociativă. Identitatea constă în a nu adăuga nici o traversă. Elemente p, q și r sînt propriile lor inverse, iar s și t sînt inverse unul altuia. (Atunci cînd se combină, un element cu inversul său, rezultatul este echivalent cu a nu desena de loc traverse.) Acesta nu este însă un grup abelian, întrucît, de exemplu, p urmat de q nu este tot una cu q urmat de p.

Tabelul din fig. 6 redă o descriere completă a structurii acestui grup. Care este rezultatul continuării lui r cu s ? Căutăm pe r la marginea stîngă a tabelului și pe s la marginea de sus. Ea intersecția rîndului cu coloana respectivă găsim o celulă etichetată p. Cu alte cuvinte, o traversă de tip r, urmată de o traversă de tip s, are același efect asupra drumului ca o traversă de tip p. Acesta este un grup foarte elementar, pe care îl întîlnim în multe ocazii. De pildă, dacă etichetăm într-un fel oarecare colțurile unui triunghi echilateral, apoi rotim și reflectăm acest triunghi în așa fel încît el să ocupe mereu aceeași poziție în plan, găsim că există doar șase transformări fundamentale posibile. Ele au o structură asemănătoare cu a grupului pe care tocmai l-am descris. Nu este nevoie să intrăm în prea multe detalii ale teoriei grupurilor pentru a vedea că jocul cu linii nu permite niciodată ca doi jucători să-și sfîrșească drumurile pe aceeași linie verticală. Pur și simplu, imaginați-vă că aceste trei linii sînt trei șnururi. O traversă are exact același efect asupra ordinii drumurilor ca o încrucișare a două șnururi, ca formarea unei împletituri. Evident, indiferent de felul în care se face împletitura, sau de cît de lungă este aceasta, vor exista întotdeauna trei capete inferioare distincte.

Să ne imaginăm că împletim trei șuvițe din părul unei fete. Putem înregistra permutările succesive ale șuvițelor cu ajutorul diagramelor cu linii, dar această diagramă nu ne va arăta felul în care șuvițele trec unele peste sau pe sub altele. Dacă ținem seama de acest factor topologic care complică lucrurile, mai este oare posibil să facem apel la teoria grupurilor pentru a descrie operația pe care o facem ? Răspunsul este Da, iar cel care a demonstrat pentru prima dată aceasta a fost Emil Artin, un distins matematician german, care a murit în 1962. În eleganta sa teorie a împletiturilor, elementele grupului sînt denumite „forme de țesături” (infinite ca număr), iar operația constă, ca și la jocul cu linii, în a continua o formă cu alta. Ca și înainte, elementul identitate este o formă care constă din șuvițe drepte — rezultatul operației comode de a nu face nimic. Inversa unei forme de țesătură este imaginea ei într-o oglindă. Fig. 7 reprezintă un exemplu de formă urmată de inversa ei. Teoria grupurilor ne spune că atunci cînd unui element i se adaugă inversul său rezultatul este identitatea, în mod vizibil, cele două forme de țesături combinate se dovedesc a fi, din punct de vedere

7

	e	p	q	r	s	t
e	e	P	?	r	—i— i s l l	t
P	P	e	s	t	l l 9 I	T
i	i	t	e	s	l i r i i	P
r—	—r—	—s—			l i -p	q
s	s	r	P		t	e
t	t	q	r	p	e	s

Fig. 6 Rezultatul cuplării elementelor din grupul jocului cu linii.

punsul este Da, iar cel care a demonstrat pentru prima dată aceasta a fost Emil Artin, un distins matematician german, care a murit în 1962. În eleganta sa teorie a împletiturilor, elementele grupului sînt denumite „forme de țesături” (infinite ca număr), iar operația constă, ca și la jocul cu linii, în a continua o formă cu alta. Ca și înainte, elementul identitate este o formă care constă din șuvițe drepte — rezultatul operației comode de a nu face nimic. Inversa unei forme de țesătură este imaginea ei într-o oglindă. Fig. 7 reprezintă un exemplu de formă urmată de inversa ei. Teoria grupurilor ne spune că atunci cînd unui element i se adaugă inversul său rezultatul este identitatea, în mod vizibil, cele două forme de țesături combinate se dovedesc a fi, din punct de vedere

topologic, echivalente cu identitatea. Este

8

suficient să tragem puțin de capetele împletitunii din ilustrație și toate șuvițele se separă. (Multe dintre trucerile cu coarde sînt bazate pe această interesantă proprietate a grupurilor. Pentru un exemplu foarte bun, vezi capitolul 7 din cartea Amuzamente matematice a lui M. Gardner³.) Teoria împletiturilor a lui Artin nu numai că a furnizat pentru prima oară un sistem care clasifică toate tipurile de împletituri; ea a oferit totodată și o metodă prin care se poate determina dacă două forme de țesături, indiferent cît de complicate ar fi ele, sînt sau nu topologic echivalente.

Teoria împletiturilor este implicată într-un joc neobișnuit, imaginat de poetul, scriitorul și matematicianul danez Piet Hein. Tăiați dintr-un carton gros o bucată de forma unui ecuson, așa cum se arată în fig. 8, pe care o vom denumi pe scurt plăcă. Cele două fețe ale sale trebuie să fie ușor de deosebit, așa că este bine să colorați sau să însemnați cu un X una dintre ele. Faceți trei găuri în marginea de sus. De fiecare gaură legați cîte o bucată de sfoară grea, dar flexibilă, cam de jumătate de metru. Celelalte capete ale sforilor se leagă de un obiect fix, cum ar fi spătarul unui scaun.

Veți descoperi imediat că placa poate fi rotită complet în șase moduri diferite, pentru a forma șase împletituri diferite. Astfel, ea poate fi rotită lateral, spre dreapta sau spre stînga; poate fi rotită înainte și înapoi printre sforile A și B; poate fi rotită înainte și înapoi printre sforile B și C. Cel de-al doilea desen al fig. 8 arată împletitura obținută printr-o rotație înainte printre B și C. Se pune următoarea problemă: este oare posibil să deznodăm această împletitură prin simpla „țesere” a plăcii printre sfori, adică ținînd placa întotdeauna orizontal, cu partea marcată cu X în sus și cu partea ascuțită îndreptată mereu spre noi? Răspunsul este Nu. Dar dacă dați plăcii o a doua rotație, în unul oarecare dintre cele șase moduri, rezultatul este o împletitură care poate fi desfăcută prin țeserea plăcii printre fire, fără rotirea ei.

Fig. 7

Împletitura A este imaginea în oglindă a împletitunii A'.

³ M. Gardner, Amuzamente matematice, Editura Științifică, București, 1968, p. 224. - N.R.

8

ABC ABC ABC

Fig. 8 O rotație produce împletitura din centru; o a doua rotație — împletitura din dreapta.

Pentru a lămuri acest lucru, să presupunem că cea de-a doua rotație este înainte, printre A și B, ceea ce duce la împletitura din cel de-al treilea desen al figurii. Pentru a dezlega această împletitură fără rotirea plăcii, ridicați mai întîi coarda C din locul însemnat cu Y și treceți placa pe sub el, de la dreapta la stînga. Trageți de sfori pînă se întind, apoi ridicați coarda A din locul marcat cu Z și treceți placa pe sub el de la stînga spre dreapta.

Rezultatul este că sforile vor fi perfect întinse.

Pentru orice număr de coarde mai mare decît doi se demonstrează următoarea teoremă surprinzătoare. Orice împletitură rezultată dintr-un

8

număr par de rotații (rotațiile putînd fi făcute în orice direcție) poate fi întotdeauna dezlegată prin țeserea plăcii, fără rotație; împletiturile produse printr-un număr impar de rotații complete nu pot fi niciodată dezlegate.

Piet Hein a auzit pentru prima oară despre această teoremă prin anii treizeci cu ocazia unui seminar susținut de Paul Ehrenfest la Institutul de fizică teoretică a lui Niels E-ohr, în legătură cu o problemă de mecanică cuantică. El și colegii săi au improvizat pe loc o demonstrație a teoremei, folosind un foarfece al doamnei Bohr, legat cu sfori de spătarul unui scaun. Mai tîrziu, Piet Hein a descoperit că, întrucît corpul rotitor și lumea înconjurătoare participă în mod simetric la această problemă, modelul inițial poate fi înlocuit cu unul simetric, realizat, foarte simplu, prin legarea cîte unei plăci la fiecare capăt al coardei. Cu un astfel de model, două persoane pot juca un fel de joc topologic. Fiecare ține o plăcă, iar cele trei sfori sînt ținute întinse între plăci. Partenerii joacă pe rînd, unul formînd o împletitură, iar celălalt dezlegînd-o, și cronometrează durata operației. Cîștigă cel care dezleagă mai repede.

Teorema par-impar se aplică și la acest joc pentru două persoane. Este bine ca începătorii să se limiteze la împletituri de cîte două rotații, apoi vor trece la un număr mai mare (dar par!) de rotații, numai pe măsură ce își dezvoltă iscusința. Piet Hein a numit acest joc $Tan\text{-}gloid^{\wedge}$; el a fost un timp foarte popular în Europa.

Dar de unde provine oare diferența categorică între numerele de rotații pare și impare? Aceasta este o întrebare grea, care nu poate primi răspuns fără a intra mai adînc în teoria grupurilor. O sugestie ar fi că două rotații în sensuri exact opuse sînt echivalente, evident, cu o non-rotire. Iar dacă două rotații sînt aproape opuse — elementul care le împiedică să fie perfect opuse fiind modul în care anumite coarde trec prin plăcă — atunci împletitura poate fi desfăcută, dez-legînd aceleași coarde în sens invers în jurul plăcii. Într-un articol publicat în 1942, într-o revistă matematică londoneză, M. H. A. Newman spunea că P. A. M. Dirac, renumitul fizician de la Universitatea din Cambridge, folosea de mulți ani varianta solitară a acestui joc ca un model pentru „ilustrarea faptului că grupul fundamental al grupului rotațiilor în spațiul tridimensional are un singur generator cu perioadă 2”. Newman recurge apoi la teoria împletiturilor a lui Artin, pentru a demonstra că sforile nu pot fi dezlegate dacă numărul de rotații este impar.

4 To tangle — a înnoda (lb. engleză). — N.T.

9

Realizînd împletituri prin rotirea la întîmplare a plăcii de un număr par de ori, și văzînd apoi cît de repede puteți dezlega coardele vă oferiți o distracție captivantă. În fig. 9 sînt desenate trei împletituri simple, formate fiecare din cîte două rotații. Împletitura din partea stîngă a fost făcută rotînd placa înainte de două ori, printre B și C ; cea din mijloc — rotînd placa mai întîi înainte prin B și C, apoi înapoi printre A și B ; împletitura din dreapta — rotînd placa de două ori lateral spre dreapta. Cititorii sînt invitați să găsească cea mai bună metodă de dezlegare a fiecăreia dintre aceste împletituri.

ABC ABC ABC

Fig. 9 Trei probleme de desfacere a împletiturilor.

9

ADAOS

Pentru a construi dispozitivul pentru jocul Tangloid al lui Piet Hein, este preferabil, firește, să folosiți plăci nu din carton, ci din lemn sau din material plastic. În loc de trei coarde separate, Piet Hein recomanda folosirea unei singure coarde mai lungi. Porniți cu ea de la prima gaură a unei plăci (înnodîndu-i capătul ca să nu iasă), introduceți-o apoi prin prima gaură a celei de-a doua plăci, mergeți cu coarda în lungul acestei plăci, treceți-o prin gaura din mijloc, apoi prin gaura din mijloc a primei plăci, în lungul acesteia spre gaura a treia, și înapoi spre a treia gaură a plăcii a doua, și înnodați capătul după ce coarda a fost trecută în sfîrșit și prin această ultimă gaură. Deoarece coarda poate aluneca liber prin găuri, acum placa poate fi manevrată mai ușor decît înainte. Un cititor mi-a scris că a legat cele două plăci prin fire elastice și a găsit că manevrarea este și mai ușoară. Desigur jocul poate fi complicat adăugînd noi coarde, dar chiar și numai cu trei el ni se pare destul de complicat. Este suficientă o singură privire la tabelul din fig. 6 pentru a ne convinge că grupul pe care îl reprezintă nu este abelian (comutativ). Tabelele pentru grupurile abeliene sînt simetrice în raport cu o axă care trece prin colțurile din stînga-sus și dreapta-jos. Aceasta înseamnă că secțiunile triunghiulare situate de o parte și de alta a acestei diagonale constituie, una, imaginea în oglindă a celeilalte.

Dacă jocul cu linii de la începutul capitolului este jucat nu de trei, ci de patru jucători, atunci grupul său asociat este grupul de permutări de patru simboluri. Acesta nu este, totuși, identic cu grupul care descrie rotațiile și reflexiile unui pătrat, deoarece nu toate permutările colțurilor unui pătrat pot fi obținute prin rotirea și reflexia pătratului. Transformările pătratului constituie un „subgrup” al grupului permutărilor de patru simboluri. Toate grupurile finite (grupurile cu un număr finit de elemente) sînt fie grupuri de permutări, fie subgrupuri ale unor grupuri de permutări.

În articolul său din 1947 asupra teoriei împletiturilor (vezi Bibliografia), Artin dă o metodă de reducere a oricărei împletituri la o „formă normală”. Aceasta constă mai întîi în a face ca prima coardă să fie perfect întinsă, apoi se face ca și a doua coardă să fie întinsă — cu excepția buclelor pe care le poate face în jurul coardei 1 ; după aceea este „îndreptată” și coarda 3 — cu excepția unor bucle în jurul coardelor 1 și 2, și așa mai departe cu toate celelalte coarde. „Deși este pe deplin demonstrat că orice împletitură poate fi deformată pentru a fi redusă la o formă normală similară, scrie Artin, utorul este convins că orice încercare de aplicare a acestei reduceri

9

la o persoană în viață ar duce numai la proteste violente și la acțiuni discriminatorii împotriva matematicii”. Într-o scurtă scrisoare pe care am primit-o de la Dirac — prea tîrziu însă pentru a o putea include și comenta în text — acesta spune că s-a gîndit pentru prima oară la problema coardelor cam prin 1929 și că de atunci a folosit-o de multe ori pentru a ilustra că două rotații ale unui corp în jurul unei axe pot fi deformate în mod continuu, printr-o serie de mișcări, care sfîrșesc fiecare în poziția de plecare, ajungînd astfel la non-mișcare. „Faptul că un corp care se rotește poate poseda exact o jumătate — și nici o altă fracțiune — dintr-o cantitate de moment cinetic, scria Dirac, este o consecință a acestei proprietăți a rotațiilor”.

RĂSPUNSURI

Cele trei probleme cu împletituri se rezolvă în modul următor: 1. Treceți placa pe sub coarda C de la dreapta spre stînga, apoi pe sub coardele A și B de la stînga la dreapta. 2. Treceți placa pe sub mijlocul coardei B de la stînga spre dreapta. 3. Treceți placa, de la stînga spre dreapta, pe sub toate coardele.

CAPITOLUL III

Opt probleme

1. ÎMPĂRȚIREA ÎN TRIUNGHIURI ASCUȚITUNGHICE

Fiind dat un triunghi cu un unghi obtuz, este oare posibil să se împartă triunghiul în triunghiuri mai mici, cu condiția ca fiecare dintre ele să fie triunghi ascuțitunghic ? (Se spune că un triunghi este ascuțit atunci cînd are toate unghiurile ascuțite. Un unghi drept nu este, firește, nici obtuz, nici ascuțit.) Dacă împărțirea nu se poate face, dați o demonstrație a imposibilității; dacă se poate face, care este numărul minim de triunghiuri ascuțitunghice în care poate fi împărțit orice triunghi obtuzunghic?

Fig. 10 ilustrează o încercare tipică, care duce la impas. Triunghiul

a fost împărțit în trei triunghiuri ascuțitunghice — dar al patrulea este obtuzunghic, așa că nu s-a cîștigat nimic

prin împărțirile precedente.

Problema (care mi-a fost comunicată de Mei Stover, din Winnipeg) este amuzantă, deoarece are șanse să inducă în eroare chiar și pe cel mai bun matematician și să-l facă

Fig. 10 Poate fi împărțit acest triunghi ob- să ajungă la O concluzie falsă, tuzuughic în triunghiuri ascuțite ?

Plăcerea cu care am lucrat la

10

ea m-a făcut să-mi propun o problemă înrudită: care este numărul minim de triunghiuri ascuțitunghice în care poate fi împărțit un pătrat ? Zile întregi am fost convins că răspunsul este nouă; apoi, dintr-o dată, am văzut că numărul poate fi redus la opt. Mă întreb câți cititori vor putea descoperi o soluție cu opt triunghiuri, sau poate chiar și una mai bună. Nu sînt în stare să demonstrez că opt este numărul minim, deși bănuiesc că așa trebuie să fie.

2. CÎT MĂSOARĂ UN „LUNAR”?

în cartea lui H. G. Wells Primul om pe Lună se descoperă că satelitul nostru natural este locuit de niște insecte inteligente, care trăiesc în caverne subterane. Să presupunem că aceste creaturi au o unitate de măsură pentru lungimi pe care o vom numi „lunar”. Ea a fost adoptată din cauză că aria Lunii, exprimată în lunari pătrați, este exact egală (numeric) cu volumul Lunii exprimat în lunari cubici. Diametrul Lunii este de 2160 mile. Cîte mile măsoară un lunar?

3. JOCUL GOOGOL

în 1958, John H. Fox, jr., de la Minneapolis-Honeywell Regulator Company și L- Gerald Marnie, de la Institutul tehnologic din Massachusetts, au născocit un neobișnuit joc de pariat, pe care l-au numit Googol². El se joacă după cum urmează: cereți cuiva să ia cîte foi de hîrtie dorește și pe fiecare foaie să scrie cîte un număr pozitiv distinct. Numerele pot merge de la fracțiuni foarte mici ale lui 1 și pînă la numere de ordinul unui „googol”. Foile sînt întoarse cu fața în jos și amestecate pe suprafața unei mese. întoarceți cu fața în sus, rînd pe rînd, cîte o foaie. Scopul este de a vă opri cînd ați ajuns la numărul pe care îl bănuieți că este cel mai mare din serie. Nu vă puteți întoarce și alege o foaie întoarsă mai înainte. Dacă ați întors toate foile, trebuie să acceptați numărul de pe ultima foaie întoarsă.

Cei mai mulți vor presupune că probabilitatea de a nu nimeri numărul cel mai mare este de cel puțin 5 la 1. în realitate, dacă folosiți

1 la 1 milă (terestră) % 1,6 km. — N.T.

8 Googol — un număr egal cu 1 urmat de 100 de zerouri, scris ca 10^{100} . Matematicianul american Edward Kasner (1878—1955) a bătut în glumă o monedă cu acest nume. — N.T.

10

strategia cea mai bună, șansa de a cîștiga este ceva mai mare de 1 la 3. Se nasc însă două întrebări. Mai întîi, care este strategia cea mai bună ? (Observați că nu este același lucru cu a cere o strategie care să facă maximă valoarea numărului ales.) în al doilea rînd, dacă urmați această cea mai bună strategie, cum se poate calcula șansa de cîștig ?

Dacă există numai două foi, șansa dv. de cîștig este, evident, de 1 la 2, indiferent ce foaie ați alege. Pe măsură ce numărul foilor crește, probabilitatea de a cîștiga (presupunînd că folosiți strategia cea mai bună) scade, dar curba se aplatizează rapid și dincolo de 10 foi, scăderea este foarte mică. Probabilitatea nu scade niciodată sub 1/3. Mulți jucători vor presupune că vă fac sarcina cu mult mai grea alegînd numere extrem de mari, dar un moment de gîndire vă va arăta că ordinul de mărime al numerelor este cu totul lipsit de importanță. vSingura condiție este ca pe foi să fie înscrise numere care pot fi aranjate în ordine crescătoare.

Jocul are multe aplicații interesante. De pildă, o fată hotărâște să se mărite înainte de sfîrșitul anului. Ea își face socoteala că pînă atunci va întîlni zece bărbați care ar putea fi convinși să-i ceară mîna și că, o dată refuzat, nici unul din ei nu va mai încerca și a doua oară. Ce strategie trebuie ea să urmeze pentru a-și face maximă șansa de a accepta pe cel mai bun dintre cei 10, și care este probabilitatea de a reuși?

Strategia constă în a refuza un anumit număr de foi de hîrtie (sau de propuneri de căsătorie) și în a alege apoi primul număr care îl depășește pe cel mai mare din cele cuprinse în foile refuzate. Tot ceea ce va trebui este o formulă cu care să determinați cîte foi trebuie refuzate, în funcție de numărul total de foi.

4. DEFILAREA REGIMENTULUI ȘI CÎINELE PLIMBĂREȚ

O formație pătrată de soldați, avînd latura de 50 de picioare³, defilează cu pas constant, mergînd numai înainte (fig. 11). Mascota regimentului, un mic terrier, pleacă din centrul rîndului din urmă al formației (poziția A pe desen), aleargă înainte în linie dreaptă pînă ajunge la centrul rîndului de soldați din frunte (poziția B), apoi aleargă înapoi tot în linie dreaptă către centrul ultimului rînd. în clipa cînd

* Un picior ~ 0,3 m. — N.T.

10

I I I I ^

a reajuns în poziția A, formația a avansat cu exact 50 de picioare. Presupunînd că viteza cîinelui este constantă și că acesta nu pierde timp cînd își schimbă direcția, care este distanța pe care o parcurge ?

Dacă rezolvați problema aceasta, care nu cere decît cunoștințe de algebră elementară, poate că vă încumetați să

încercați varianta mult mai dificilă, propusă de faimosul problemist Șam Loyd (vezi cartea *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (Enigme matematice) voi. 2, Dover, 1960, p. 103). În loc să alerge înainte și* înapoi printre soldați, mascota aleargă cu viteză constantă de-a lungul perimetrului pătratului, și cât mai aproape de acesta. Ca și înainte, se presupune că formația a înaintat 50 de picioare, în timp ce câinele se reîntoarce în poziția A. Ce distanță parcurge câinele ?

Fig. 11 Ce distanță parcurge câinele ?

5. CORDONUL D-LUI BARR

Stephen Barr, din Woodstock, statul New York, declară că la halatul său are un cordon lung de stofă, ale cărui capete sînt tăiate ca în fig. 12. Cînd pleacă în călătorie și își împachetează cordonul, îi place să-l răsucească sul cât mai strîns cu putință, începînd de la un capăt — însă capetele tăiate oblic îi irită simțul de simetrie. Pe de altă parte, dacă îndoaie capetele în așa fel încît să le facă drepte, la rulare, grosimea inegală a stofei produce ghemotoace. Dl. Barr a experimentat și procedee mai complicate de îndoire preliminară, dar oricît s-a străduit n-a reușit să obțină un dreptunghi de grosime uniformă. De exemplu, procedeul arătat în figură duce la un dreptunghi cu grosimea trei în porțiunea A și doi în porțiunea B.

„Nimic nu este perfect, înăuntru sînt prea multe așchii”, spunea unul dintre filozofii din cartea lui James Stephens, *Vaza cu aur*. Cu toate acestea, Barr a reușit în cele din urmă să-și împătorească cordonul în așa fel, încît și capetele să fie drepte și să facă parte

11

Fig. 12 Cordonul lui Barr (sus) și un mod nesatisfăcător de a-l răsuci (jos).

dintr-un dreptunghi cu grosime uniformă. După aceea, cordonul poate fi înfășurat frumos și fără ghemotoace. Cum a reușit Barr? Pentru rezolvarea problemei, puteți folosi o fișie de hîrtie tăiată în mod adecvat.

6. ADB, NEGRU ȘI CAFENIU

Profesor Merle White, de la catedra de matematică, profesor Eeslie Black, de la filozofie, și Jean Brown, din administrație⁴, iau masa împreună la cantina Universității.

— Nu este interesant, zise doamna, că numele noastre de familie sînt Black, Brown și White, iar unul dintre noi are părul negru, unul cafeniu și celălalt alb ?

— Adevărat! remarcă persoana cu păr negru. Dar ai observat oare că nici unul dintre noi nu are părul de culoarea care să corespundă numelui ?

— Dumnezeule, așa e! exclamă White.

Dacă părul doamnei este cafeniu, ce culoare are părul profesorului Black ?

4 White — alb, black — negru și brown — cafeniu. Toate prenumele alese sînt atribuite, în țările de limbă engleză, atît bărbaților cît și femeilor. — N.T.

11

7. AVIONUL, ÎN FURTUNA

Un avion zboară în linie dreaptă de la aeroportul A către aeroportul B, apoi înapoi de la B la A, tot în linie dreaptă. Viteza lui este constantă și nu bate vîntul. Dacă presupunem acum că pe durata ambelor zboruri bate un vînt constant de la A înspre B, atunci durata zborului va fi mai mare, mai mică sau egală cu cea din primul caz ? (Viteza motoarelor rămîne neschimbată.)

8. CÎT COSTĂ ANIMALELE FAVORITE?

Proprietarul unei prăvălii de animale favorite a cumpărat un anumit număr de șoareci albi și jumătate pe atîtea perechi de papagalî. El a plătit 2 dolari pentru fiecare șoarece alb și un dolar pentru fiecare papagal. Prețul de vînzare l-a fixat cu 10% mai mare decît prețul pe care l-a plătit, atît pentru șoareci, cît și pentru papagalî.

După ce a vîndut toate animalele, în afară de șapte, negustorul constată că a încasat pentru ele exact suma totală plătită de el la cumpărare. Cîștigul său este reprezentat de prețul total de vînzare al celor șapte animale încă nevîndute. Cît este acest cîștig?

RĂSPUNSURI

1. Un număr de cititori mi-au trimis „demonstrații” după care un triunghi obtuzunghic nu poate fi împărțit în triunghiuri ascuțitunghice — dar împărțirea poate fi totuși realizată. Fig. 13 arată o soluție-tip, care se aplică oricărui triunghi obtuzunghic și care duce la șapte triunghiuri ascuțitunghice.

Este ușor de văzut că numărul minim este șapte. Unghiul obtuz trebuie divizat printr-o linie. Această linie nu poate însă merge pînă la latura cealaltă, pentru că atunci ar forma un alt triunghi obtuzunghic, care la rîndul lui ar trebui împărțit, așa că soluția nu ar fi minimală pentru triunghiul de la început. Așadar, linia care împarte unghiul

obtuz trebuie să se termine în interiorul unghiului. Muzunghic poate fi împărțit în:

1) Un punct din interiorul unghiului împărțit în șapte triunghiuri ascuțitunghice.

11

triunghiului. În acest punct trebuie însă să se întîlnească cel puțin cinci linii, pentru că în caz contrar unghiurile formate între ele nu ar fi toate ascuțite. Acest aranjament formează un pentagon intern de cinci triunghiuri — ceea ce duce la un total de șapte triunghiuri. Această demonstrație a fost dată ca soluție la problema E1406, propusă în revista „*American Mathematical Monthly*”, noiembrie 1960, p. 923, de către Wallace Manheimer, pe

atunci profesor la un liceu din Brooklyn. Tot el a arătat cum trebuie construită soluția pentru orice triunghi obtuzunghic.

Se ridică o întrebare: Oare orice triunghi obtuzunghic poate fi împărțit în șapte triunghiuri ascuțitunghice isoscele! Răspunsul este Nu. Verner E. Hoggatt, jr., și Russ Denman au demonstrat („American Mathematical Monthly”, noiembrie 1961, pp. 912—913) că opt asemenea triunghiuri sînt suficiente pentru orice triunghi obtuzunghic, iar Free Jamison (ibid., iunie-iulie 1962, pp. 550—552) a arătat că opt sînt și necesare. Pentru detalii în legătură cu condițiile în care sînt posibile soluții cu mai puțin de opt triunghiuri, trebuie consultate aceste articole. Un triunghi dreptunghic sau un triunghi ascuțitunghic neisoscel pot fi împărțite, fiecare, în cîte nouă triunghiuri ascuțitunghice isoscele, iar un triunghi ascuțitunghic isoscel — în patru triunghiuri ascuțitunghice isoscele congruente⁵ între ele și asemenea cu originalul.

Un pătrat poate fi tăiat în opt triunghiuri ascuțitunghice, așa cum se vede din fig. 14. Dacă împărțire» prezintă simetrie bilaterală, punctele P și P' trebuie să fie situate în interiorul suprafeței umbrite, determinate de cele patru semicercuri, într-o scrisoare, Donald E. Vanderpool a-rată că sînt posibile deformări asimetrice ale acestui tipar, cu punctul P situat oriunde în afara suprafeței umbrite, cu condiția ca el să Fig. 14 Pătrat împărțit în opt triunghiuri ascu- rămîină în afara celor două ținunghice. semicercuri mari.

5 Două figuri geometrice sînt congruente atunci cînd, suprapuse, coincid în toate punctele. — N. T.

12

Aproximativ 25 de cititori mi-au trimis demonstrații — mai mult sau mai puțin formale — ale faptului că împărțirea în opt este minimală. Una dintre ele, datorată lui Harry Lindgren, a apărut în revista „Australian Mathematics Teacher”, voi. 18, pp. 14—15, 1962. Demonstrația sa mai arată că, abstracție făcînd de deplasările punctelor P și P', menționate mai înainte, soluția este și unică. H. S. M. Coxeter a demonstrat faptul surprinzător, și anume, că pentru orice dreptunghi, chiar dacă laturile sale diferă ca lungime printr-o cantitate arbitrar de mică, segmentul de dreaptă PP' poate fi deplasat la centru, în așa fel încît să dea tiparului simetrie atît orizontală, cît și verticală.

' Două întrebări au rămas fără răspuns : Terence C. Terman a împărțit pătratul în 11 triunghiuri ascuțitunghice isoscele, și se întreabă dacă acesta este numărul minim. Iar Alan Sutcliffe întreabă dacă există un patrulater care să nu poată fi împărțit în opt sau mai puține triunghiuri ascuțitunghice.

Fig. 15 arată cum pot fi împărțite în numărul minim de triunghiuri steaua regulată cu cinci colțuri și „crucea grecească”.

2. Volumul unei sfere se obține înmulțind cu $47r/3$ cubul razei iar aria, înmulțind cu $4\pi r^2$ pătratul razei. Dacă exprimăm raza Lunii în „lunari” și presupunem că suprafața în lunari pătrați este numeric egală cu volumul în lunari cubici, putem determina lungimea razei punînd pur și simplu semnul egal între cele două expresii și rezolvînd pentru valoarea razei. Numărul 7π se simplifică în ambii membri, și găsim că raza este de trei lunari. Raza Lunii este de 1 080 de mile, așa că un lunar trebuie să măsoare 360 de mile.

3. Indiferent de numărul de foi care intră în jocul Googol, probabilitatea de a alege foaia pe care este înscris numărul cel mai mare nu scade niciodată sub 0,367879 (cu condiția să se folosească strategia cea mai bună). Numărul acesta este inversul numărului $e-1$ — și reprezintă limita către care tinde probabilitatea de a cîștiga jocul cînd numărul foilor tinde către infinit.

Dacă numărul foilor este zece (un număr convenabil din punct de vedere practic), probabilitatea de a alege numărul cel mai mare este de 0,398. Strategia constă în a întoarce trei foi, în a nota numărul cel mai mare de pe ele, apoi în a alege primul număr următor care îl va depăși pe acesta. Dacă jocul este repetat de foarte multe ori, vă puteți aștepta să cîștigați cam două jocuri din fiecare cinci.

în cele ce urmează voi relata succint analiza completă a jocului dată de Leo Moser și J. R. Pounder, de la Universitatea din Alberta

$e-1$ — număr transcendent, egal cu 2,7182818. . . folosit ca bază a logaritmilor naturali. — N.T.

12

Fig. 15 Numărul minim de împărțiri pentru pentagramă (sus) și pentru crucea grc ceașcă (jos).

(Canada). Fie n numărul total de foi și p numărul de foi refuzate înainte de a alege primul număr mai mare decît toate numerele cuprinse în primele p foi. Numerotăm foile una după alta de la 1 la 11 . Fie $k+1$ numărul de ordine al foii care poartă numărul cel mai mare; acest număr va putea fi ales numai dacă k este egal sau mai mare decît p (în caz contrar numărul maxim va fi refuzat printre primele p foi), dar și atunci, numai dacă numărul cel mai mare de pe filele de la 1 la k este în același timp și numărul cel mai mare de pe filele de la 1 și p (fiindcă în caz contrar numărul acela va fi ales înainte de a se fi ajuns la numărul maxim de pe ansamblul foilor). Dacă numărul cel mai mare se află pe foaia $k-f-1$, probabilitatea de a-l găsi este p/k , iar probabilitatea ca acest număr cel mai mare să se afle efectiv pe foaia $k-f-1$ este $1/w$. Întrucît numărul cel mai mare nu se poate afla decît pe o singură foaie, putem scrie următoarea relație pentru probabilitatea de a-l găsi :

Da o valoare dată a lui n (numărul de foi), putem determina numărul optim de refuzuri alegînd acel p care face maximă valoarea expresiei de mai sus. Pe măsură ce n tinde spre infinit, p/n tinde spre $1/e$, așa că o bună estimare a lui p este pur și simplu întregul cel mai apropiat de n/e . Prin urmare, dacă se joacă cu n foi, strategia generală constă în a lăsa să treacă primele n/e numere care ies și în a alege apoi primul număr care este mai

mare decît cel mai mare număr înscris pe cele nje foi refuzate.

Aceasta presupune, desigur, că jucătorul nu știe cît de mari pot fi numerele înscrise pe foi și, prin urmare, nu are nici un reper cu care să aprecieze că un număr ales este mare sau mic în cadrul intervalului ales. Dacă cineva are un asemenea reper, analiza nu se mai aplică. De exemplu, dacă jocul este jucat cu numerele de serie înscrise pe zece bancnote de cîte un dolar, iar prima dumeavoastră încercare este o bancnotă al cărei număr de serie începe cu 9, strategia cea mai bună ar fi să alegeți chiar acea bancnotă. Din motive asemănătoare, strategia jocului Googol nu se aplică nici la problema fetei nemăritate, așa cum au remarcat mulți cititori, fiindcă fata cunoaște probabil destul de bine gama valorilor eventualilor pretendenți și are în minte o imagine despre ceea ce consideră drept soț ideal. Dacă primul bărbat care o cere în căsătorie se apropie foarte mult de idealul pe care și l-a făurit și totuși nu-l acceptă imediat, îmi scria Joseph P. Robin-son, „înseamnă că ea are tîrîță în cap”. După cît se pare, inventînd jocul, Fox și Marnie, au ajuns independent la o problemă care fusese

P (1

n

13

abordată și de alții, cu cîtiva ani mai înainte. Mai mulți cititori mi-au scris că au auzit de această problemă încă înainte de 1958 — unul dintre ei își amintește chiar că lucrase el însuși la ea prin 1955 — dar în publicații nu am putut găsi nici o referire la ea pînă în 1958. Problema maximalizării valorii obiectului ales — și nu a șanseii de a alege obiectul cu valoarea cea mai mare — se pare că a fost propusă pentru prima oară de celebrul matematician Arthur Cayley⁷ în 1875 (vezi articolul Asupra unei probleme a lui Cayley de Leo Moser, în „Scripta Mathematica”, septembrie-decembrie 1956, pp. 289 — 292).

4. Să presupunem că atît lungimea laturii careului de soldați, cît și timpul necesar careului să avanseze cu această lungime sînt amîn-două egale numeric cu 1. Viteza formației va fi prin urmare tot 1. Fie x distanța totală parcursă de cîine și, totodată, viteza acestuia. Cît timp cîinele aleargă înainte, viteza lui față de cea a soldaților este x — 1, iar la întoarcere, x + 1. Față de formația de soldați fiecare cursă a cîinelui înainte sau înapoi se face pe o distanță egală cu 1, iar cursa dus și întors durează unitatea de timp, așa că se poate scrie următoarea ecuație:

$$X - 1 = X + 1$$

Ea poate fi exprimată sub formă pătratică :

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

a cărei rădăcină pozitivă este $1 + \sqrt{2}$. Dacă înmulțim această valoare cu 50, obținem rezultatul final, 120,7 picioare. Cu alte cuvinte, cîinele parcurge o distanță totală egală cu latura pătratului, plus aceeași lungime înmulțită cu rădăcina pătrată a lui 2.

Cealaltă versiune a problemei, dată de Eoyd, în care cîinele aleargă în jurul careului în mișcare, poate fi abordată în exact același mod. Voi parafraza o soluție scurtă și clară, care mi-a fost trimisă de Robert F. Jackson, de la Centrul de calcul al Universității din Delaware.

Ca și înainte, fie 1 latura careului și tot 1 timpul necesar soldaților ca să parcurgă 50 de picioare; așadar, viteza lor va fi tot 1. Fie x distanța străbătută și, totodată, viteza cîinelui. Viteza acestuia în raport cu viteza careului va fi x — 1 cînd el aleargă înainte, $V \cdot 2 - 1$ cînd aleargă lateral și x + 1 atunci cînd aleargă înapoi. Întreaga rută este parcursă în unitatea de timp, așa că putem scrie ecuația :

$$x - 1 = V \cdot 2 - 1 = x + 1$$

' Arthur Cayley, matematician englez (1821-1895). - N.T.

13

Aceasta poate fi rescrisă ca o ecuație de gradul patru:

$$x^4 - 4x^2 - 2x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Ea are o singură rădăcină reală pozitivă, și anume 4,18112... ; înmulțind-o cu 50, obținem răspunsul dorit: 209,056... picioare.

Theodore W. Gibson, de la Universitatea din Virginia, a găsit că, prima formă a ecuației de mai sus poate fi scrisă și după cum urmează, luînd rădăcina pătrată a fiecărui membru:

$$x - 1 = \sqrt{V \cdot 2 + 1}$$

Această formă este remarcabil de asemănătoare cu ecuația stabilită pentru prima variantă a problemei.

Mai mulți cititori au trimis analize ale unor variante ale acestei probleme: o formație în pătrat care avansează într-o direcție paralelă cu diagonala pătratului; formații în poligoane regulate cu mai mult de patru laturi; formații circulare ; formații care se rotesc etc. Thomas J. Meehan și David Salsburg au observat că problema este de fapt identică cu cea a unui vas de război care navigînd în jurul unui vapor în mișcare execută o cursă de recunoaștere, de forma unui pătrat, și au arătat că problema poate fi ușor rezolvată cu ajutorul diagramelor vectoriale.

5. Modul cel mai simplu de a împături cordonul d-lui Barr în așa fel încît fiecare capăt al acestuia să fie drept și să facă parte dintr-un dreptunghi de grosime uniformă este arătat în fig. 16. Această împăturire permite o înfășurare în sul fără ghemotoace (îndoiturile transversale de la capete uniformizează îndoitura în lung) și este valabilă indiferent de lungimea centurii sau de unghiurile sub care sînt tăiate capetele.

6. Presupunerea că Jean Brown ar fi „doamna”⁸ duce evident la contradicție. Într-adevăr, remarca „doamnei” de

la începutul discuției este urmată de o replică a persoanei cu păr negru — prin urmare părul lui Jean Brown, dacă ea este „doamna”, nu poate fi negru.

A,	—*	—t—	—*	-1	◆	_____
				t		A.

Fig. 16 Așa și-a împăturit în cele din urmă Barr cordonul.

8 Numele Jean este, totuși, mai răspândit printre femei, așa că această ipoteză pare firească. — Ar. T.

14

Dar el nu poate fi nici cafeniu, pentru că s-ar potrivi cu numele. Prin urmare, trebuie să fie alb. Aceasta lasă cafeniul pentru culoarea părului profesorului Black și negrul pentru cea a profesorului White. Dar o afirmație a persoanei cu păr negru atrage după sine o exclamație din partea lui White, așa că aici nu poate fi vorba de una și aceeași persoană.

Este necesar să admitem, prin urmare, că Jean Brown este bărbat. Părul profesorului White nu poate fi alb (pentru că s-ar potrivi cu numele), dar nici negru, pentru că el (sau ea) răspunde la un moment dat persoanei cu părul negru. Prin urmare, trebuie să fie cafeniu. Dacă părul doamnei nu este cafeniu, atunci profesorul White nu este o femeie. Brown este bărbat, așa că profesorul Black trebuie să fie femeie. Părul ei nu este negru sau cafeniu — așa că neapărat trebuie să fie. . . blond platinat.

7. Deoarece vântul mărește viteza avionului pe drumul de la A la B și o micșorează la întoarcere, ați fi tentat să presupuneți că aceste influențe se compensează, așa că durata totală a călătoriei rămâne neschimbată. Dar lucrurile nu stau așa, deoarece durata pe care viteza avionului este mărită este mai scurtă decât cea pe care ea este micșorată — așa că efectul de ansamblu este o întârziere. Durata totală a unei călătorii efectuate pe vreme de vânt cu viteză și direcție constante, indiferent de viteză și direcție, va fi întotdeauna mai mare decât pe vreme liniștită.

8. Fie x numărul de șoareci albi cumpărați și, totodată, numărul de papagali. Fie y numărul de șoareci albi printre cele șapte animale încă nevândute. Numărul de papagali printre ele va fi $7 - y$. Numărul de șoareci vânduți (la un preț de 2,20 dolari bucata) va fi $x - y$, iar numărul de papagali vânduți (cu 1,10 dolari bucata) va fi $x - 7 + y$.

Costul animalelor este deci $2x$ dolari pentru șoareci și x pentru papagali — în total $3x$ dolari. Șoarecii vânduți au dus la încasarea a $2,2(x - y)$ dolari, pe când papagalii vânduți — la încasarea a $1,1(x - 7 + y)$ dolari — în total $3,3x - 1,1y - 7,7$ dolari.

Ni se spune că aceste două totaluri sînt egale, așa că pur și simplu le egalăm și, simplificîndu-le, obținem următoarea ecuație diofantică* cu două necunoscute numere întregi:

$$3x = 1,1y + 7,7$$

Întrucît x și y sînt întregi pozitivi iar y nu este mai mare decât 7, este foarte simplu să se încerce toate cele opt valori posibile (inclusiv

* Ecuație diofantică — o ecuație matematică care implică mai mult decît o variabilă, în care coeficienții variabilelor sînt numere întregi și pentru care se caută soluții numere întregi. Numită astfel după Diofant, matematician grec care a trăit în secolul al IX-lea î.e.n. — N.T.

14

zero) ale lui y , cu scopul de a determina care dintre ele îl face și pe x întreg. Există numai două astfel de valori: 5 și 2. Fiecare dintre aceste valori ar putea constitui o soluție a problemei — dacă n-ar fi faptul că papagalii au fost cumpărați în perechi! Această circumstanță elimină pe 2 ca valoare posibilă pentru y , deoarece ea ar duce pentru x (numărul de papagali cumpărați) la valoarea impară? 33. Conchidem deci că y este 5.

Să rezumăm: vînzătorul a cumpărat 44 de șoareci albi și 22 de perechi de papagali, plătind în total 132 de dolari. A vîndut apoi 39 de șoareci și 21 perechi de papagali, încasînd în total 132 de dolari. I-au rămas 5 șoareci, în valoare de 11 dolari, și 2 papagali, în valoare de 2,20 dolari — un total de 13,20 dolari, care reprezintă răspunsul la problemă.

CAPITOLUL IV

Jocurile și enigmele lui Lewis Carroll

Reverendul Charles L. Dodgson, care a scris povești și fantezii nemuritoare sub pseudonimul Lewis Carroll, era un matematician obscur, care ținea cursuri încîlcite la Oxford și scria tratate la fel de încîlcite în domeniile geometriei sau algebrei determinanților. Subiectele și felul său de a scrie au căpătat interes și trăinicie abia cînd i-a venit ideea să abordeze matematica dintr-un unghi mai puțin serios. Bertrand Russell spunea că singurele descoperiri însemnate ale lui Carroll au fost două paradoxuri logice, publicate ca glume în revista „Mind”.

Carroll a mai scris două cărți de logică pentru tineret, fiecare dintre ele tratînd subiecte care sînt astăzi demodate, dar conținînd exerciții și probleme atît de stranii și de absurde, încît ambele cărți, reunite recent într-o ediție de buzunar, cîștigă din ce în ce mai mulți cititori. Tratatul său serios nu au mai fost de mult retipărite, dar cele două volume ale sale de enigme originale, *A Tangled Tale* (Poveste încîlcită) și *Pillow Problems*

(Probleme pentru la noapte), au fost și ele reeditate într-un volum de buzunar.

Fără a ne atinge de subiectul nici uneia dintre aceste patru cărți sau a interfera cu materialul recreativ din excelentul articol al lui Warren Weaver Lewis Carroll, matematicianul („Scientific American”, aprilie 1956), să trecem în revistă câteva dintre incursiunile mai puțin cunoscute ale reverendului Dodgson în țara jocurilor și a enigmelor.

În Sylvie and Bruno Concluded (Sylvie și Bruno, finalul), cea de-a doua parte a acum aproape uitatei fantezii a lui Carroll Sylvie and Bruno, un profesor german întreabă un grup de oaspeți ai casei dacă

15

LEWIS CARROLL. Un desen de Harry Furniss, ilustratorul cărții lui Carroll Sylvie și Bruno.

le este cumva cunoscut curiosul inel de hîrtie care poate fi format dintr-o fișie răsucită o dată, căreia i se lipesc capetele :

— Am văzut unul tocmai ieri, spuse contele. Muriel, dragă, nu făceai tu cumva unul ieri, ca să distrezi copiii veniți în vizită ?

— Ba da, cunosc jocul, spuse Lady Muriel. Inelul are o singură suprafață și o singură muchie. Fără îndoială, e ceva foarte misterios!

Profesorul se apucă atunci să demonstreze strînsa legătură dintre banda Moebius¹ și o altă remarcabilă monstruoasă topologică,

¹ August-Ferdinand Moebius, matematician german (1790—1868). — AM".

15

planul proiectiv: o suprafață cu o singură față și fără nici o muchie. Mai întîi îi ceru Lady-ei Muriel trei batiste.

Două dintre ele sînt puse una peste alta și ținute de cele două colțuri de sus. Marginile de sus sînt cusute împreună, apoi uneia dintre batiste i se dă o jumătate de răsucire, după care se cos și marginile de jos. Rezultatul este desigur o suprafață Moebius, cu o singură muchie care constă din cele patru muchii fale batistelor.

Batista a treia are și ea patru muchii, care formează o buclă închisă. Dacă aceste patru muchii sînt acum cusute cu cele patru muchii ale benzii Moebius, rezultatul — explică profesorul — va fi o suprafață închisă și fără muchii, asemănătoare sferei — cu excepția faptului că are o singură parte.

— Înțeleg! Întrerupe entuziastă Lady Muriel. Suprafața ei externă se va continua cu cea internă. Dar cere timp. O s-o cos după cină. Dar spuneți-mi, domnule profesor, de ce numiți asta Punga Norocosului?

Profesorul zîmbi înțelegător.

— Dar nu vezi, draga mea? Ceea ce este în pungă este și în afara ei; iar ceea ce este afară este și înăuntru. Așa că în ea poți strînge toate bogățiile pămîntului.

Nu mai este cazul să spunem că Lady Muriel nu a reușit niciodată să coasă și cea de-a treia batistă. Coaserea nu poate fi făcută fără autoîntretăierea fețelor — dar construcția propusă dă o idee destul de sugestivă asupra structurii planului proiectiv.

Admiratorii contelui Alfred Korzybski — care a fundamentat semantica generală — își citează deseori maestrul, spunînd că „harta nu este același lucru cu teritoriul”. Dar profesorul german al lui Carroll explică foarte clar cum în țara sa harta și teritoriul pot deveni în cele din urmă identice. Pentru a crește precizia, cartograful au mărit treptat scara hărților lor, mai întîi la trei metri la kilometru, apoi la o sută de metri la kilometru.

— Și atunci ne-a venit ideea cea mai măreață dintre toate, spuse Herr Professor. În cele din urmă am reușit să facem o hartă a țării la scara de un kilometru la kilometru !

— Ați folosit-o mult ? îl întrebai.

— Nu, încă nu am desfășurat-o, spuse profesorul. Au existat proteste din partea fermierilor; ei spuneau că harta ar acoperi întreaga țară și ar opri lumina Soarelui! Așa că pentru moment folosim țara însăși drept propria sa hartă — și vă asigur că e aproape la fel de bună.

Acesta este desigur modul lui Carroll de a lua peste picior ceea ce credea că ar fi un respect excesiv al englezilor pentru erudiția germană, „în zilele acestea — scria el în altă parte — nici un om de știință

15

care își respectă numele nu mai poate tuși altfel decît prin Ach! Euch ! Auch!"

Preocuparea constantă a lui Carroll pentru matematica recreațională este dovedită și de numeroasele paragrafe dedicate acestui subiect în Jurnalul său, publicat de Oxford University Press, în 1954. Astfel, la 19decembrie 1898, Carroll scria: „Stat astă noapte pînă la4 dimineața asupra unei probleme care-mi fusese trimisă de la New York : să se găsească trei triunghiuri dreptunghice egale (ca suprafață) și cu laturi numere raționale. Am găsit două, ale căror laturi sînt 20, 21, 29; 12, 35, 37, dar nu am reușit să dau de al treilea". Poate că unii cititori vor găsi interesant să verifice dacă nu cumva vor avea succes acolo unde Carroll a capitulat. De fapt, nu există nici o limită pentru numărul de triunghiuri dreptunghice cu laturi numere întregi și arii egale — deși pentru mai mult de trei triunghiuri ariile sînt exprimate totdeauna prin numere cu mai mult de șase cifre.

Carroll s-a apropiat foarte mult de găsirea celui de-al treilea triunghi, așa cum se va arăta în paragraful consacrat răspunsurilor de la sfîrșitul capitolului. Există o soluție, la care aria triunghiului, deși mai mare decît ariile fiecăruia dintre cele două triunghiuri găsite de Carroll, nu depășește totuși 1000.

„în ultimele câteva zile — scria Carroll la 27 mai 1894 — am rezolvat câteva probleme curioase asupra dilemei

„minciunii". De pildă, A spune că B minte ; B spune că C minte ; C spune că A și B mint. Problema este: Cine minte și cine spune adevărul?"

Dintre cele câteva jocuri neobișnuite cu cuvinte inventate de Carroll cel cunoscut sub numele de Dubleții, care se joacă de unul singur, a devenit foarte popular în zilele sale, probabil datorită concursurilor organizate de revista engleză „Vanity Fair". El constă, în esență, în a alege două cuvinte convenabile, de aceeași lungime, și în a schimba apoi pe unul în celălalt printr-o serie de cuvinte intermediare, fiecare diferind de cel precedent printr-o singură literă. Este interzis să se folosească drept cuvinte intermediare nume proprii sau care nu pot fi găsite într-un dicționar uzual.

Istețimea constă, desigur, în a efectua schimbarea cu cel mai mic număr posibil de cuvinte intermediare. Pentru cei interesați, iată tema primului concurs organizat de „Vanity Fair" :

Dovediți că IARBA este VERDE

Si că MAIMUȚA a dus la OMENIRE.

Faceți din UNU DOI.

Schimbați ROZ-ul în ALB.

Puneți ROUGE pe OBRAZ.

Faceți să fie VARA FRIG.

16

Ca și multor alți matematicieni, lui Carroll îi plăceau tot felul de jocuri de cuvinte; el a compus anagrame² pentru numele diferiților oameni celebri (una dintre cele mai bune : William Ewart Gladstone — Wild agitator! Means well³), a scris acrostihuri⁴ pe nume de fete, a născocit ghicitori și șarade⁵ și a făcut calambururi⁶. Scrisorile către prietenii săi copii sînt pline de lucruri de felul acesta.

De altfel, toate scrierile lui Carroll abundă în calambururi — deși ele sînt de cele mai multe ori mai mult istețe decît rătăcioase. Virtuozitatea sa în materie de calambururi a atins punctul culminant într-un pamflet politic, intitulat Dinamica unei Particule, care începe cu următoarei e definiții:

„Se numește Superficialitate Completă⁷ caracterul unui discurs în care date fiind două puncte oarecare, vorbitorul este descoperit mințind⁷ oriunde în raport cu aceste două puncte. Furia Vizibilă⁷ este înclinarea a doi alegători unul față de altul, atunci cînd se întîlnesc, dar ale căror vederi nu sînt îndreptate în aceeași direcție. Atunci cînd un alegător întîlnește un alt alegător și face ca argumentele dintr-o parte să fie egale cu argumentele din cealaltă, sentimentele fiecăreia dintre părți poartă numele de Furie Dreaptă⁷. Atunci cînd două partide, fuzionînd, simt o Furie Dreaptă, se spune că sînt Complementare (deși aceasta se întîmplă rareori în practică). O Furie Oarbă⁷ este cea care este mai mare decît o Furie Dreaptă".

Tot calamburul matematic furnizează cea mai mare parte a umorului altui pamflet, O nouă metodă de evaluare a lui 7t. în fragmentul pe care îl redau mai jos, iz ține locul salariului lui Benjamin Jowett⁸, profesor de limba greacă și traducător al lui Platon, pe care mulți îl suspectau de vederi religioase neortodoxe. Fragmentul satirizează eșe

2 Anagramă — transpunerea literelor unui cuvînt sau ale unei propoziții, în scopul de a forma un alt cuvînt sau propoziție. — N.T.

3 William Ewart Gladstone — Instigator sălbatic! Vrea numai binele. Aluzie la politica omului de stat britanic W. E. Gladstone (1809 — 1898), de patru ori prim-ministru, între 1868 și 1894. — N.T.

4 Acrostih — serie de versuri în care prima, ultima sau alte litere anumite formează un cuvînt, o propoziție etc. — N.T.

6 Șaradă — tip de enigmă foarte răspîndit, în care trebuie să se ghicească un cuvînt sau o propoziție pe baza definirii fiecăreia dintre silabele sale. — N.T.

¹ Calambur — mod umoristic de a folosi un cuvînt, în așa fel încît să se scoată în evidență diferite înțelesuri sau aplicații, sau folosirea unor cuvinte care sînt asemănătoare sau aproape asemănătoare ca sunet, dar diferite ca înțeles. — N.T.

⁷ Jocuri de cuvinte intraductibile: Plain superficiality (superficialitate completă) — Plane surface (suprafață plană) ; To lie — a minți și a fi situat; Plain anger (furie vizibilă) — Plane angle (unghi plan) ; Right anger (furie dreaptă) — Rigid angle (unghi drept) ; Obtuse anger (furie oarbă) — Obtuse angle (unghi obtuz). — N.T.

⁸ 1817-1893. - (N.T.)

cui oficialităților de la Universitatea Oxford în a cădea de acord asupra salariului profesorului Jowett. (J reprezintă pe Jowett):

„Se știe de mult că obstacolul principal în evaluarea numărului tz a fost prezentat lui J ; în perioada mai de început a matematicii, J ar fi fost, probabil, investigat cu ajutorul unor axe⁹ rectangulare și ar fi fost împărțit în două părți neegale — un procedeu arbitrar de eliminare care în zilele noastre nu mai este considerat strict legal". Aproape că auzi țipătul Reginei de cupă¹⁰: „Să i se taie capul!"

Marii scriitori care se lasă antrenați din cînd în cînd în jocurile de cuvinte se declară mai întotdeauna admiratori ai lui Carroll. Există multe referințe Carrolliene în romanul lui James Joyce Finnegans Wake, inclusiv o aluzie ușor ironică la Carroll însuși: „Dodgfather, Dodgson & Coo."¹¹ Nu este surprinzător să afli că Vladimir Nabokov, al cărui roman Lolita este remarcabil nu numai prin subiectul său șocant, dar și prin acrobațiile sale

verbale, a tradus în limba rusă, în 1923, Alice în țara minunilor (nu prima traducere). Mai există și alte legături Carroll-Nabokov. Ca și Carroll, Nabokov este îndrăgostit de șah (unul dintre romanele sale Apărarea, are ca erou un jucător de șah maniac), iar povestitorul din Lolita, Humbert Humbert, seamănă leit cu Carroll în entuziasmul său pentru fete. Trebuie să ne grăbim a adăuga că în mod sigur Carroll ar fi fost șocat, totuși, de Lolita.

Dodgson se considera un om fericit, dar se simte o oarecare umbră de tristețe trecînd peste majoritatea fanteziilor sale: singurătatea unui burlac timid și inhibat, care stătea treaz nopțile luptînd împotriva a ceea ce el numea „gînduri nesfînte”, inventînd complicate „probleme pentru la noapte” și rezolvîndu-le pînă dimineață.

„Și ce fel de bucurie mai poate fi și asta,

Cînd mintea mi-e plină de indici și semne ?

$x^3 + 1x + 53 = 11/3$ ”.

ADAOS

Lewis Carroll a inventat Dubleții cu ocazia Crăciunului lui 1877, pentru două fete care „nu aveau cu ce-și trece timpul”. A publicat un număr de articole și note despre joc, pe care-l numise la început „Cuvinte înlănțuite”.

Pentru detalii asupra acestor publicații și un istoric al jocului, vezi The Lewis Carroll Handbook (Manualul Lewis Carroll), editat de Roger L. Green, Oxford Press, pp. 94—101.

9 în limba engleză, axe înseamnă secure. — N.T.

10 Personaj din Alice în țara minunilor. — N.T.

11 To coo — a murmura amoros. — N.T.

17

Probleme de dubleți apar în cărți de enigme atît mai vechi, cît și mai noi. Dmitri Borgmann, în recenta sa carte Language on Vacation (Limba în vacanță), la p. 155, le numește „scări de cuvinte” și atrage atenția că scara de cuvinte ideală este aceea în care cele două cuvinte nu au litere comune în aceleași poziții, iar schimbarea este îndeplinită cu același număr de trepte cîte litere conține un cuvînt. El dă ca exemplu trecerea de la CALD la FRIG în patru trepte.

Nu este prea surprinzător că întîlnim Dubleți (sub numele de „golf cu cuvinte”) în romanul lui Nabokov Pale Fire (Foc palid). Povestitorul nebun din roman, comentînd versul 819 al poemului în jurul căruia se țese acțiunea, vorbește despre trecerea de la Ură la Iubire în patru trepte¹², de la Fată la Bărbat în patru¹², iar de la Viu la Mort în cinci, cu verbul „A se adapta” la mijloc¹². Soluții pentru primele două au fost date de Mary McCarthy, în remarcabila sa recenzie asupra romanului. D-ra McCarthy adaugă cîteva dubleți proprii, bazați pe cuvinte din titlul romanului.

Într-un eseu asupra Limitelor evoluției moleculare (în „The Scientist Speculates”, editat de I. J. Good, Basic Books, 1962, pp. 252-256), John Maynard Smith a găsit o asemănare uimitoare între dubleți și procesul prin care o specie trece în alta. Dacă ne imaginăm o moleculă elicoidală de ADN¹³ ca un „cuvînt” enorm de lung, atunci fiecare mutație corespunde unei trepte din jocul de cuvinte. Așadar transformarea de la Maimuța la Omenire s-a realizat efectiv printr-un proces cu totul analog jocului cu Dubleți^{1*}.

RĂSPUNSURI

Răspunsul, cu numerele cele mai mici, la problema lui Lewis Carroll, care cere să se găsească trei triunghiuri dreptunghice cu laturi exprimate prin numere întregi și cu arii egale, este : 40, 42, și 58; 24, 70 și 74 ; și 15, 112 și 113. În toate cazurile aria este 840. Dacă Lewis Carroll ar fi dublat dimensiunile celor două triunghiuri găsite de el, ar fi obținut primele două triunghiuri menționate mai înainte, de la care pasul spre cel de-al treilea ar fi fost ușor. În răspunsul său la problema nr. 107, autorul cărții Canterbury Puzzles (Enigmele din Canterbury), Henry Ernest Dudeney, dă o formulă cu ajutorul căreia pot fi găsite ușor astfel de triunghiuri.

12 în limba engleză, respectiv : HATE-LOVE, LASS-MALE și LIVE-(LEND)-DEAD. - N.T.

13 ADN este prescurtarea uzuală pentru acidul dezoxiribonucleic, care intervine în transferul caracterelor genetice și în sinteza proteinelor. — N.T.

14 în limba engleză, dubletul este APE-MAN. — -V. T.

17

T_ Tn labirint desenat de Lewis Carroll cînd avea 20 de ani. Pornind din centru, trebuie să găsiți ieșirea spre exterior. Drumurile trec unul pe sub altul sau unul peste altul, iar din loc în loc sînt blocate de bariere.

Problema „minciună sau adevăr” a lui Carroll are un singur răspuns care nu duce la o contradicție logică: A și C mint, iar B spune adevărul. Problema se reduce ușor la calculul propozițional¹⁵, alegînd cuvîntul „spune” drept conjuncția logică numită echivalență. Fără a face apel la logica simbolică, se pot înșira cele opt combinații posibile pentru „a minți” și „a spune adevărul”, pentru cei trei oameni, eliminînd apoi pe cele care duc la contradicții logice.

15 Calcul propozițional sau sentențial — ramură a logicii simbolice, care studiază relațiile logice dintre afirmații, în măsura în care acestea pot fi descompuse în conjuncții, disjuncții și negații ale altor afirmații mai elementare. — N.T.

CAPITOLUL V

Tăieturi din hîrtie

Capitolul 16 al cărții lui M. Gardner Amuzamente matematice¹ este consacrat recreațiilor matematice pe baza

îndoirii hîrtiei, fără tăierea ei. Dacă în joc intervine și o pereche de foarfece, se deschid o mulțime de posibilități noi — dintre care multe servesc la reliefaarea într-un mod inedit a unor teoreme fundamentale și importante ale geometriei plane.

De pildă, să luăm binecunoscuta teoremă care afirmă că suma unghiurilor interne ale oricărui triunghi este de 180 grade. Tăiați un triunghi dintr-o foaie de hîrtie. Desenați cîte un punct în apropierea fiecărui vîrf, apoi îndoiiți de-a lungul liniilor punctate, ca în figura 17a: veți constata că cele trei unghiuri se îmbină întotdeauna perfect, formînd împreună un unghi de 180 grade. Încercați aceeași construcție cu colțurile unui patrulater. Figura poate fi de orice formă, inclusiv de formă concavă, ca cea ilustrată în fig. 176. Cele patru unghiuri îndoite formează întotdeauna, prin unire, un unghi de 360 grade. Dacă prelungim laturile unui poligon convex, ca în fig. 17c, unghiurile marcate cu linii punctate se numesc unghiuri externe. Indiferent de numărul laturilor poligonului, dacă unghiurile externe sînt tăiate și reunite, ele vor forma întotdeauna un unghi de 360 grade. Dacă două sau mai multe laturi ale unui poligon se intersectează, avem ceea ce se numește un poligon încrucișat. Un exemplu familiar este steaua cu cinci colțuri sau pentagrama — simbol al frăției vechi-
1 Editura Științifică, București, 1968, p. 307. - N.R.

18

Fig. 17 Cum pot fi descoperite teoreme ale geometriei plane prin împărțirea sau tăierea poligoanelor.

Fig. 18 Alunecarea unui chibrit de-a lungul laturilor unei pentagrame dovedește suma unghiurilor marcate cu punct este de 180 grade.

lor pitagoreici. Desenați o astfel de stea cît mai neregulat cu putință (puteți chiar include formele degenerate arătate în fig. 18, în care unul sau două puncte ale stelei sînt situate în interior), punctați cele cinci colțuri, tăiați steaua și reuniți colțurile. Veți fi, poate, surprinși să găsiți că, la fel ca în cazul triunghiului, vîrfurile oricărei pentagrame se pot reuni, formînd un unghi de 180 grade. Această teoremă poate fi demonstrată și printr-o altă metodă empirică amuzantă, care ar putea fi numită metoda chibritului alunecător. Desenați o pentagramă mai mare, apoi așezați un chibrit de-a lungul uneia dintre laturi, așa cum se vede în partea de sus a figurii 18.

Alunecați chibritul în sus pînă cînd gămălia atinge vîrfurile, apoi înclinați-i coada spre stînga, în așa fel ca chibritul să se așeze de-a lungul celeilalte laturi. În acest fel, chibritul și-a schimbat orientarea în plan cu un unghi egal cu unghiul de la colțul de sus al stelei. Alunecați chibritul în jos pînă la următorul colț și procedați la fel. Continuați să alunecați chibritul, repetînd operația la fiecare vîrf. Atunci cînd chibritul ajunge la poziția de unde a plecat, el*va fi cu capul în jos, deoarece a făcut pe parcurs o rotație de exact 180 grade. Această rotație este, evident, egală cu suma celor cinci unghiuri ale pentagramei.

Metoda chibritului alunecător poate fi folosită atît pentru confirmarea teoremelor deja menționate, cît și pentru găsirea altora noi. Este o metodă comodă pentru măsurarea unghiurilor oricărui tip de poligon, inclusiv cele cu formă de stea sau alte forme întîmplătoare. Întrucît chibritul trebuie să se întoarcă la poziția sa de plecare, fie cu aceeași direcție, fie cu sensul inversat, urmează că suma unghiurilor traversate trebuie să fie un multiplu al unui unghi de 180 grade (bineînțeles, numai dacă chibritul a fost rotit de fiecare dată într-o aceeași direcție). Dacă chibritul a fost rotit în ambele direcții în timpul alunecării — cum se întîmplă deseori în cazul poligoanelor încrucișate — nu putem obține o sumă a unghiurilor, deși și în acest caz pot fi enunțate un număr de teoreme. Astfel, un chibrit alunecat în jurul perimetrului "unui octogon încrucișat ca în fig. 19 se va roti în sensul acelor unui ceasornic la unghiurile marcate cu A, și cu aceeași deschidere unghiulară la unghiurile B. Prin urmare, nu putem afla nimic despre suma celor opt unghiuri, dar putem spune că suma celor patru unghiuri A este egală cu suma celor patru unghiuri B. Această concluzie poate fi ușor verificată prin metoda foarfecelor, sau prin oricare metodă geometrică formală.

Chiar și familiara teoremă a lui Pitagora se pretează la multe demonstrații elegante cu foarfecele și hîrtia. Iată aici una mai remarcabilă, descoperită în secolul al XIX-lea de Henry Perigal, un agent de bursă londonez și astronom amator în orele libere. Construiți

18

B

Fig. 19 În acest octogon concav, suma unghiurilor notate cu A este egală cu suma unghiurilor notate cu B. pătrate pe cele două catete ale unui triunghi dreptunghic oarecare (fig. 20) ; împărțiți pătratul mai mare (sau unul dintre ele dacă cele două sînt egale) în patru părți identice, trasînd două linii prin centru, sub unghi drept una față de alta și cu una dintre linii paralelă cu ipotenuza triunghiului. Tăiați cele patru părți și pătratul rămas întreg. Veți constata că cele cinci piese obținute pot fi deplasate fără a le schimba orientarea în plan, în așa fel încît să puteți forma

18

Fig. 20 Demonstrația lui Henry Perigal, făcută cu ajutorul hîrtiei și foarfecelor, pentru celebra propoziție nr. 47 a lui Euclid.

un alt pătrat, mai mare, așezat pe ipotenuză (indicat prin linii punctate).

Perigal a descoperit această demonstrație prin 1830, dar nu a publicat-o decît în 1873. Era atît de fermecat de ea, încît purta diagrama desenată pe agenda sa de lucru; o avea astfel la îndemînă ori de cîte

ori se întâlnea cu prietenii și îi venea mai ușor să-i convingă de valabilitatea teoremei. Este interesant să aflăm, din necrologul lui Perigal păstrat la Societatea Astronomică Regală din Eondra, că „țelul astronomic cel mai mare al lui Perigal” fusese să-i convingă pe alții, și în special „pe tinerii nu prea înrăiți în credința contrară”, că este o deosebit de gravă eroare să numești „rotație” revoluția Eunii în jurul Pământului. Pentru a-și fsusține punctul de vedere, Perigal a scris pamflete, a construit modele și chiar a compus poeme, „purțând cu un curaj eroic povara eșecului perpetuu al tuturor acestor încercări”.

Împărțirea poligoanelor în bucăți care să formeze alte poligoane este una dintre cele mai fascinante ramuri ale matematicii recreative. S-a demonstrat că orice poligon poate fi tăiat într-un număr finit de bucăți, care să formeze orice alt poligon cu aceeași arie — dar astfel de împărțiri rămân, firește, lipsite de interes dacă numărul de bucăți este nu destul de mic pentru a face disecția șocantă. Cine și-ar închipui, de pildă, că hexagrama regulată (sau steaua cu șase colțuri a lui David) poate fi tăiată în numai cinci bucăți, care se rearanjează într-un pătrat (fig. 21) ? (Pentagrama regulată nu poate fi împărțită în mai puțin de opt bucăți care să formeze un pătrat.)

Cel mai mare expert din lume la acest gen de disecții este probabil Harry Eindgren,

Fig. 21 E. B. Escott a descoperit această transformare a unei hexagrame refulate într-un pătrat. "

de la Oficiul australian de patente. În fig. 22 sînt reprezentate frumoasa sa împărțire în șase bucăți a unui dodecagon regulat și rearanjarea bucăților în pătrat.

O clasă total diferită de recreații cu hîrtie tăiată, care ține poate mai mult de scamatori decît de matematicieni, constă în îndoirea unei foi de hîrtie de mai multe ori, în practicarea unei singure tăieturi în linie dreaptă și în desfacerea foii sau a celor două foi rezultate pentru a citi din forma* tăieturii cine știe ce fel de veste surprinzătoare. De exemplu, bucata de hîrtie după despăturire poate prezenta o figură geometrică regulată, sau un desen, sau poate avea o gaură de o astfel de formă. În anul 1955, o societate a magicienilor din Chicago a publicat, sub semnătura lui Gerald M. Loe, o cărticică numită Paper Capers (Euforii cu hîrtie), care se ocupă aproape în întregime cu astfel de jocuri. Cartea explică cum să îndoii o foaie de hîrtie, în așa fel încît cu o singură tăietură să se realizeze orice literă dinainte dată a alfabetului, sau diferite tipuri de stele sau de cruci, sau forme mai complicate, ca de pildă lanțuri circulare de stele, o stea în interiorul altei stele etc. Un truc foarte răspîndit printre scamatorii americani și care implică o singură tăietură este cel cunoscut sub numele de tăierea bicoloră. Un pătrat de hîrtie, colorată în roșu și negru ca o tablă de șah cu cîte opt pătrățele pe fiecare latură, este îndoit într-un anumit mod, după care se face o singură tăietură. Aceasta separă pătrățelele roșii de cele negre și, totodată, fiecare pătrățel de celălalt. Folosind o hîrtie extrem de subțire, care permite observarea structurilor prin mai multe straturi, nu este greu să ela

Fig. 22 împărțirea unui dodecagon regulat și transformarea lui în pătrat, efectuată de Harry Lindgren.

borati o metodă de a realiza acest truc, precum și metode de a obține cu o singură tăietură figuri geometrice simple ; dar cu figuri mai complicate, problema este foarte dificilă.

Un joc cu hîrtie tăiată, de origine necunoscută, este ilustrat în fig. 23. El este însoțit de obicei de o istorioară despre doi lideri politici — unul admirat și celălalt urît. Ambii mor și se apropie de porțile cerului. Bineînțeles, cel Rău (R) nu posedă hîrtia necesară pentru intrare. El cere ajutorul celui Bun (B), care este lîngă el. Acesta își împătorește hîrtia lui, după cum se vede în fig. 23 a, b, c, d și e, apoi o taie de-a lungul liniei punctate indicate. Reține partea de la dreapta, dînd restul lui R. Sfîntul Petre deschide foaia lui R aranjează bucățile ca în partea din stînga-jos a figurii și vede cuvîntul IAD2. Cînd desface foaia lui B, constată că ea are forma unei cruci (partea dreaptă a figurii). Așa că decizia lui este ușoară.

Evident, este imposibil să se îndoie hîrtia în așa fel încît cu o tăietură dreaptă să se realizeze figuri curbă, dar dacă foaia este înfășurată în formă de con, tăieri în felii plane prin acest con vor produce fișii în formă de cercuri, elipse, parabole sau hiperbole, după unghiul de tăiere. Acestea sînt, bineînțeles, vestitele secțiuni conice studiate de vechii greci. Mai puțin cunoscut este faptul că se poate realiza rapid o curbă sinusoidală, înfășurînd o foaie de hîrtie de mai multe ori în jurul unei luminări cilindrice și apoi tăind diagonal prin hîrtie - și luminare. Cînd este desfășurată, fiecare dintre cele două jumătăți ale hîrtiei va avea una dintre margini tăiată în formă de curbă sinusoidală — una dintre formele fundamentale de undă în fizică. Procedul poate fi util gospodinelor care doresc să-și confecționeze un model drăguț pentru hîrtia de pe rafturile unui dulap.

Iată acum două probleme fascinante de tăiere, ambele avînd de-a face cu cuburi. Prima este ușoară; cealaltă — nu chiar ușoară.

1. Care este lungimea minimă a benzii de hîrtie late de 1 cm din care prin împărțire se poate confecționa un cub cu latura de 1 cm?

2. Un pătrat de hîrtie cu latura de trei centimetri este negru pe o parte și alb pe cealaltă. Împărțiți cu creionul acest pătrat în nouă pătrate cu latura de 1 cm. Tăind numai de-a lungul liniilor desenate, este oare posibil să se taie o formă care, prin îndoire după liniile desenate, să conducă la un cub de culoare neagră în exterior ? Forma trebuie să fie dintr-o singură bucată.

2 In limba engleză - HELL. - N.T.

Fig. 23 Un vechi joc cu hîrtie tăiată.

ADAOS

Există, fără îndoială, tot felul de demonstrații geometrice tradiționale ale faptului că unghiurile celor trei tipuri de pentagrame ilustrate în fig. 18 au un total de 180 grade. Cititorul poate încerca să redescopere unele dintre ele — fie chiar și numai ca să se convingă că demonstrațiile făcute cu ajutorul metodei chibritului alunecător sînt mult mai simple și mai intuitive.

Perigal și-a publicat demonstrația teoremei lui Pitagora în „Messen-ger of Mathematics”, voi. 2, seria nouă, 1873, pp. 103—106. Pentru informații biografice asupra lui Perigal, a se consulta necrologul său, publicat în „Monthly Notices” ale Societății Astronomice Regale din Londra, voi. 59, 1899, pp. 226-228. Cîteva din pamfletele sale sînt comentate de Augustus de Morgan în binecunoscutul său Budget

i

a

Fig. 24 Cum poate fi obținut un cub cu latura de 1 cm prin îndoirea unei benzi de hîrtie lată de 1 cm și lungă de 7 cm.

20

Fig. 25 Un cub complet negru poate fi obținut după acest model. Foaia de hîrtie de la care se pornește (stînga sus) este înnegrită pe partea care nu se vede.

of Paradoxes (Bugetul paradoxurilor), reeditat de editura Dover în 1954.

Eleganta împărțire a hexagramei într-un pătrat a fost descoperită, de Edward Brind Escott, un agent de asigurări din Oak Ridge (Illinois) mort în 1946. El era expert în teoria numerelor și colaborator frecvent la multe reviste matematice. Împărțirea realizată de el a fost citată ca soluție la problema nr. 109 din Modern Puzzles, cartea lui Henry Ernest Dudeney, publicată în 1926.

Amănunte asupra împărțirilor remarcabile reușite de Eindgren, sînt cuprinse în rubrica de Jocuri Matematice a numărului din noiembrie 1961 al revistei „Scientific American”, ca și cartea lui Eindgren asupra împărțirilor (citată și în Bibliografie).

20

RĂSPUNSURI

Cea mai scurtă bandă de hîrtie lată de 1 cm cu care se poate confecționa un cub cu latura de 1 cm este de 7 cm. O metodă de îndoire este ilustrată în fig. 24. Dacă banda este neagră pe o parte, sînt necesari 8 cm pentru confecționarea unui cub complet negru. (Un procedeu este dat în „Recreational Mathematics Magazine”, februarie 1962, p. 52).

Foaia cu latura de 3 cm, neagră pe o singură parte, poate fi tăiată și îndoită într-un cub complet negru în mai multe feluri. Cu un model constînd din mai puțin de opt pătrate unitare, operația nu se poate face — dar centimetrul pătrat care lipsește poate fi în orice poziție. Fig. 25 indică un mod de construcție cu pătratul lipsă în mijloc. În toate soluțiile, tăieturile au o lungime totală de 5 cm. (Dacă pentru model este folosită întreaga foaie, lungimea liniilor tăiate poate fi redusă la 4 cm.)

CAPITOLUL VI

Jocuri de masă

„Jocurile posedă unele dintre calitățile operei de artă, scria Aldous Huxley. Cu regulile lor simple și precise, ele constituie insulițe ale ordinii în haosul vag și dezorganizat al experienței. Cînd jucăm, sau chiar cînd privim pe alții jucînd, trecem din lumea de neînțeles a unei realități date într-o lume mai mică, mai ordonată, o lume făcută de om, în care totul este clar, cu sens și mai ușor de înțeles. Spiritul de competiție contribuie la farmecul intrinsec al jocurilor, făcîndu-le palpitante, iar pariurile dintre spectatori și în general psihologia specifică mulțimilor adunate la competiții au, la rîudul lor, un efect excitant”.

Huxley vorbește despre jocuri în general, dar observațiile sale se aplică cu deosebire jocurilor matematice de masă, în care rezultatul este determinat de gîndirea pură, neinfluențat de îndemînuarea fizică sau de norocul orb (ca la zaruri, cărți sau alte jocuri bazate pe șansă). Aceste jocuri sînt la fel de vechi ca civilizația însăși și la fel de variate ca aripile fluturilor. Pe ele a fost cheltuită o cantitate fantastică de energie mintală, deoarece pînă foarte decurînd jocurile matematice au constituit aproape singurul mijloc de relaxare și de înprospătare a minții. Astăzi, ele au devenit dintr-o dată importante pentru teoria calculului. Mașini de jucat șah care pot învăța din experiență și pot manifesta inițiativă vor fi nu peste mult timp precursorii unor minți electronice, dotate cu puteri de neînchipuit.

Cele mai vechi informații despre jocuri matematice de masă se găsesc în arta vechiului Egipt, dar ele nu sînt de prea mare folos

20

Fig. 26 Basoreliev găsit într-un mormînt egiptean din Sahara reprezentînd, în profil, un joc de masă (2500 î.e.n.) (The Metropolitan Museum of Art, New York).

din cauza obiceiului egiptean de a reprezenta scenele numai din profil (vezi fig. 26). În mormintele egiptene au

fost găsite, este drept, anumite jocuri de masă (fig. 27), dar ele nu pot fi considerate ca jocuri de masă în sensul strict al cuvîntului, deoarece mai toate implică și un element de șansă. Ceva mai mult s-a aflat despre jocurile de masă grecești și romane, dar abia prin secolul al XIII-lea e.n. s-a considerat destul de interesant să se înregistreze regulile unui joc de masă. Primele cărți despre aceste jocuri au apărut prin secolul al XVII-lea. Ca și organismele biologice, jocurile evoluează și dau naștere unor specii noi. Un număr mic de jocuri mai simple, cum este Ticktacktoe1, pot rămîne neschimbate timp de secole ; altele sînt foarte populare o vreme, ca apoi să dispară complet. Un bun exemplu în acest sens îl constituie un foarte complicat joc cu numere, denumit Rithmomachy, care era jucat, în Europa medievală, pe o masă de șah dublă cu opt pătrățele pe o parte și șaisprezece pe cealaltă, cu piese în formă de cercuri, pătrate și triunghiuri. El a fost foarte mult jucat începînd din secolul al XI-lea, cel puțin, pînă prin secolul al XVII-lea — cînd este citat de Robert Burton în a sa *The Anatomy of Melancholy* (Anatomia melancoliei) drept un foarte popular joc englez. Despre el

1 Descrierea jocului este dată în *Amuzamente matematice*, p. 44. — N.T.

21

Fig. 27 Jocul de masă numit senet, găsit într-un mormînt egiptean datînd de la 1400 î.e.n. (The Metropolitan Museum of Art, New York).

s-au scris multe tratate savante, dar nimeni nu-l mai joacă azi în afară de cîțiva matematicieni și medievaliști. în Statele Unite, cele mai populare jocuri matematice de masă sînt fără îndoială șahul și damele. Ambele au o lungă și fascinantă istorie, cu mutații neprevăzute ale regulilor de la timp la timp și de la loc la loc. în Marea Britanie și în Statele Unite, deși damele au denumiri diferite (draughts și, respectiv, checkers), jocul este aproape identic, dar în alte țări el prezintă variații foarte mari. Așa-numitele dame „poloneze” (inventate, de fapt, în Franța) domină în momentul de față majoritatea Europei. Jocul este jucat pe o masă de zece pe zece, fiecare partener avînd cîte douăzeci de piese, care se pot „mîncea” între ele atît pe direcția înainte, cît și înapoi. Piesele încoronate (numite regine, în loc de regi), se mișcă într-un fel asemănător cu nebunii de la șah, iar atunci cînd capturează o piesă adversă se așază pe oricare pătrățel vacant de dincolo de piesa capturată. Jocul este foarte răspîndit în Franța (unde este cunoscut sub numele de dames) și în Olanda; el constituie subiectul unei literaturi analitice foarte extinse. în provinciile de limbă franceză ale Canadei și în anumite părți ale Indiei, damele poloneze sînt jucate pe o masă de doisprezece pe doisprezece.

Damele jucate în Germania (Damenspiel) se aseamănă cu cele poloneze, dar sînt jucate pe o masă englezească de opt pe opt. O formă similară a acestui joc „reduș” este foarte populară în Uniunea Sovietică, sub numele de șaški. Variantele spaniolă și italiană sînt foarte apropiate de cea engleză. în Turcia, jocul (dama) are loc tot

21

pe o masă de opt pe opt, dar fiecare partener are șaisprezece piese care ocupă cel de-al doilea și al treilea rînd la începutul jocului. Piesele se mișcă și sar înainte și lateral, dar nu și diagonal; mai există și alte deosebiri față de variantele engleză și poloneză.

Și șahul s-a schimbat foarte mult în timp în ceea ce privește regulile, varianta cea mai veche fiind localizată în India, prin secolul al VI-lea e.n. Este adevărat, există astăzi un șah internațional care este standardizat, dar mai există încă multe forme neeuropene excelente, care în mod sigur împart cu șahul internațional o origine comună. Șahul japonez (shogi) se joacă la fel de mult ca și go2, deși numai acesta din urmă este cunoscut în restul lumii. Shogi se joacă pe o masă de nouă pe nouă, cu douăzeci de piese de fiecare parte, așezate la începutul jocului pe primele trei rînduri. Ca și în varianta obișnuită, jocul este cîștigat făcînd șah-mat o piesă care se mișcă exact în același fel ca regele. O trăsătură interesantă a jocului este că piesele capturate pot fi folosite de jucătorul care le-a capturat.

Șahul chinezesc (tseung k'i) se sfîrșește și el prin șah-matul unei piese care se mișcă asemenea regelui din varianta internațională, dar regulile se deosebesc destul de mult de cele ale jocului japonez. Cele 32 de piese stau pe pătrățelele unei mese de opt pe opt, care este împărțită prin centru de un rînd orizontal gol, numit „rîu”. O a treia variantă, cea coreeană (tjyang-keui), este jucată pe pătrățelele unei mese care se aseamănă cu cea chinezească, cu excepția faptului că „rîul” nu mai este special marcat, astfel că masa arată ca o masă de dame de opt pe nouă. Numărul pieselor este identic ca în jocul chinezesc, cu aceleași nume, aceleași poziții la deschidere (excepțînd regele), dar altfel jocurile diferă mult ca reguli și ca putere a pieselor. Adepții fiecăreia dintre cele trei variante orientale consideră pe celelalte două, ca și șahul internațional de altfel, ca inferioare.

vȘahul marțian („jetan”), explicat de Edgar Rice Burroughs în anexa la romanul său *The Chessmen of Mars* (Șahiștii de pe Marte), este o variantă amuzantă, jucată pe o masă de zece pe zece, cu piese neobișnuite și reguli ciudate. De pildă, prințesa (care în linii mari corespunde cu regele din varianta pămînteană) se bucură de privilegiul unei „mutări de salvare” în fiecare joc, care îi permite să sară la orice distanță și în orice direcție. în afară de aceste variante regionale ale șahului, jucătorii moderni, plictisiți de jocul ortodox, au inventat și ei un bogat sortiment de variante, cunoscute ca „șah imaginar”. Astfel, pe o tablă de șah obișnuită se poate juca neortodox în următoarele feluri: fiecare jucător mută, atunci cînd îi vine rîndul, cîte două piese; unul dintre jucători

A se vedea *Amuzamente matematice*, pp. 47 — 48. — N.T.

21

nu are pioni de loc, sau are un rînd suplimentar de pioni în locul reginei; șah cilindric — în care partea dreaptă a tablei se consideră unită cu cea stîngă (iar dacă se consideră că tabla a fost răsucită cu 180 grade înainte de a uni marginile, șah Moebius) ; șah de transport — în care orice piesă poate fi mutată o dată cu turnul (sau așezată pe turn). Au fost introduse zeci de piese ciudate — cum ar fi „cancelarul”, care combină mișcările turnului și ale calului, „centaurul”, care combină calul cu nebunul, și chiar piese neutre (de exemplu, o regină albastră), care pot fi folosite de ambele părți. (în romanul științifico-fantastic *The Fairy Chessmen* (Jucătorii de șah imaginar) al lui Lewis Padgett, un război este câștigat datorită unui matematician pasionat de șahul imaginar. Mentea sa, obișnuită să calce reguli, este destul de elastică pentru a înțelege o ecuație prea bizară pentru colegii săi mai străluciți, dar mai ortodocși.)

O specie amuzantă de șah imaginar, destul de veche dar furnizînd încă recreații delicioase între jocuri mai serioase, se joacă în felul următor. Unul dintre jucători își așază cele șaisprezece piese în modul obișnuit, dar celălalt are o singură piesă, numită „maharajah” și avînd mișcările combinate ale reginei și ale calului.

Maharajahul este așezat inițial pe oricare pătrățel liber neamenințat de un pion, după care partea adversă face prima mișcare. Maharajahul pierde dacă este capturat și câștiga dacă reușește să facă regele șah-mat. Pionii nu pot fi înlocuiți cu regine sau cu alte piese dacă avansează pe ultimul rînd. Dacă se renunță la această condiție, maharajahul poate fi înfrînt ușor, avansînd pur și simplu pionii diu fața turnurilor, pînă cînd pot fi înlocuiți cu regine. Maharajahul nu poate împiedica acești pioni protejați să ajungă pe ultimul rînd. Cu trei regine și două turnuri este deosebit de ușor să se captureze maharajahul.

Chiar cu această condiție, s-ar putea crede că maharajahul are foarte slabe șanse de a câștiga. Dar mobilitatea sa este atît de mare, încît dacă se mișcă repede și agresiv, poate face șah-mat după numai cîteva mutări, la începutul jocului. Dacă a pierdut această ocazie, el poate curăța masa de piese și forța apoi regele singuratic să ajungă într-un colț al tablei, unde este făcut șah-mat.

S-au inventat sute de jocuri care se joacă pe mese standard de șah sau de dame, dar care nu au nimic comun cu aceste jocuri. Unul dintre cele mai bune, după părerea mea, este jocul de reversi, acum aproape uitat. Acesta folosește 64 de piese plate, care sînt vopsite în culori contrastante (de exemplu, roșu și negru) pe cele două fețe. Piesele pot fi confecționate dintr-o foaie de carton colorată diferit pe cele două părți, din care se taie rondele. Cred că merită osteneala, pentru că jocul se poate dovedi foarte interesant pentru întreaga familie.

22

Reversi începe cu masa goală. Unul dintre jucători are 32 de piese întoarse cu fața roșie în sus, iar celălalt, 32 cu fața neagră în sus. Jucătorii pun pe rînd cîte o piesă pe tablă, după următoarele reguli:

1. Primele patru piese trebuie plasate pe cele patru pătrățele centrale. Experiența a arătat că este mai bine pentru primul jucător să plaseze cea de-a doua piesă a sa deasupra, dedesubtul sau de o parte a primei piese (un exemplu este arătat în fig. 28; piesele roșii sînt reprezentate hașurat) decît diagonal, dar nu este obligatoriu să procedeze așa. De asemenea, este înțelept pentru cel de-al doilea jucător să nu joace diagonal la prima mutare a adversarului său, mai ales dacă acesta este un începător. Aceasta dă primului jucător o șansă să execute mutarea diagonală contraindicată atunci cînd își așază cea de-a doua piesă. între experți, jocul începe întotdeauna așa cum se arată în fig. 28.

2. După ce sînt completate cele patru pătrățele centrale, jucătorii continuă să plaseze cîte o piesă. Fiecare trebuie așezată astfel ca să fie adiacentă cu o piesă adversă, transversai sau diagonal. Mai mult, ea trebuie să fie în linie dreaptă cu o altă piesă de aceeași culoare și cu una sau mai multe piese adverse, și între ele să nu fie locuri goale. Cu alte cuvinte, o piesă trebuie întotdeauna plasată astfel ca să formeze pereche cu o altă piesă prietenă, de o parte și de alta a unei piese sau a unui șir de piese adverse. Aceste piese adverse sînt considerate capturate, dar în loc să fie luate de pe masă, sînt întoarse, în așa fel ca să devină piese prietene. Ele suferă, ca să spunem așa, o „spălătură a creierului”, aliindu-se cu cel care le-a capturat. Pe toată durata jocului, piesele rămîn nemișcate ca poziție, dar pot fi întoarse de pe o față pe alta de ori cîte ori.

3. Dacă așezarea unei piese capturează simultan mai mult decît un șir de piese adverse, sînt inversate piesele din ambele șiruri.

4. Piese pot fi capturate numai prin așezarea unei piese adverse. Șirurile care devin flancate la ambele capete ca rezultat al altor cauze nu sînt capturate.

5. Dacă un jucător nu poate muta, el pierde rîndul. Continuă să piardă rîndul pînă în momentul cînd pentru el devine posibilă o mișcare legală.

6. Jocul se sfîrșește cînd toate cele 64 de pătrățele sînt umplute, sau cînd nici unul dintre jucători nu mai poate muta (fie pentru că nu are posibilități legale de a muta, fie că și-a terminat piesele). Cîști-gător este cel care sfîrșește cu mai multe piese pe tablă.

Vom clarifica aceste reguli cu două exemple. în fig. 28, negrul poate juca numai pe cîmpurile 43, 44, 45 și 46. în fiecare dintre aceste cazuri, el capturează și întoarce o singură piesă adversă. în fig. 29, dacă

22

Fig. 28 O deschidere pentru jocul reversi. Numerele sînt indicate numai pentru orientare.

rosul joacă pe cîmpul 22, poate răsturna șase piese: 21, 29, 36, 30, 38 și 46. Ca rezultat, masa, care era pînă acum aproape neagră, devine brusc aproape roșie. Astfel de inversări dramatice de culoare sînt caracteristice

acestui joc neobișnuit și deseori este foarte greu de spus cine are avantaj pînă în momentul cînd trebuie să se joace ultimele piese. De cele mai multe ori, jucătorul care are piesele cele mai puține are un avantaj pozițional însemnat.

Cîteva observații pentru începători: dacă este posibil, reduceți jocul de la început la cele șaisprezece pătrățele centrale, străduindu-vă îndeosebi să ocupați cîmpurile 19, 22, 43 și 46. Primul jucător împins

23

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19 ^{^^}	20 ^{^^}		22	23	24
25	26	27 ^{^^}	28			31	32
33	34	35 [^]		•		39	40
41	42	43 ^{^^}	44		•	47	48
49	50	51	52	53	54 ^{^^}	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig. 29 Dacă cel care joacă cu piesele deschise la culoare face prima mutare, poate „captura” șase piese negre. În afara acestei arii este de obicei plasat într-o postură dezavantajoasă, în afara celor șaisprezece cîmpuri centrale, cele mai de folos cîmpuri sînt cele din colțurile tablei. Din această cauză, este neindicat să jucați pe cîmpurile 10, 15, 50 sau 55, deoarece aceasta ar da adversarului posibilitatea să ocupe cîmpurile din colțuri. După colțuri, cele mai de dorit cîmpuri sînt 3, 6, 17, 24, 41, 48, 59 și 62. Evitați să dați adversarului șansa să ocupe aceste pătrățele. Reguli strategice mai rafinate vor apărea fără îndoială celui care trece de stagiul noviciatului.

23

Prea puțin s-a publicat pînă acum în ceea ce privește analiza jocului de reversi. Este destul de greu de spus care este jucătorul cu avantaj chiar și pe o masă mică, de patru pe patru. Iată o problemă care ar putea amuza pe cititori. Este oare posibil să existe un joc în care unul dintre jucători cîștiga înainte de cea de-a zecea mutare prin eliminarea tuturor pieselor adverse de pe masă?

Paternitatea reversi-ului a fost revendicată simultan de către doi englezi, Eewis Waterman și John W. Mollett. Fiecare dintre ei l-a acuzat pe celălalt de fraudă. Prin 1880, cînd jocul se bucura de o popularitate formidabilă în Anglia, ambii pretendenți au autorizat unor firme rivale fabricarea echipamentului și editarea manualelor necesare. Indiferent de cine l-a inventat de fapt, reversi este un joc care combină complexitatea structurii cu reguli de o simplitate cuceritoare, un joc care nu merită uitarea.

ADAOS

Jocul maharajaltului (pe care l-am găsit în cartea lui R. C. Bell *Boari and Table Games* (Jocuri de masă)) poate fi întotdeauna cîștigat de jucătorul cu piese convenționale dacă joacă cu grijă. Richard A. Blue, Dennis A. Keen, William Knight și Wallace Smith mi-au trimis strategii împotriva cărora maharajahul nu se mai poate salva, dar linia de joc care mi se pare cea mai eficace mi-a fost trimisă de William E. Rudge, pe atunci student în fizică la Universitatea Yale. Dacă strategia lui Rudge este fără defect — așa cum mi se pare că este — atunci maharajahul poate fi întotdeauna capturat în cel mult 25 de mutări.

Strategia este independentă de mișcările lui M (maharajahul), cu excepția a trei mișcări posibile. În cele ce urmează sînt înșirate numai mutările atacantului:

1. a-4
2. a-5

3. a—6
4. a-7
5. e-3
6. C h-3
7. C f-4
8. N d-3
9. 0-0
10. D h-5
11. C c-3
12. C c-3, d-5
13. Ta-6
14. b-4

M este acum forțat să se miște pe rîndul 7 sau 8.

15. h-3

Această mișcare trebuie făcută numai dacă M se află pe cîmpul g—7. Mișcarea îl forțează să părăsească diagonala, permițînd mutarea următoare.

24

16. N b-2
17. T f—1, a-1
18. T e-6
19. T a-1, a-6
20. T e-7

Această mutare trebuie făcută numai dacă M se află pe g — 8.

Acum maharajahul poate fi capturat în mișcarea următoare.

23. c-3

24. D e-8

M este silit să se retragă pe rîndul 8.

21. T a-6, e-6

22. N g-7

Această mutare se face numai dacă M se" află pe f—8 sau g—8.

Mutările 1—4 pot fi interschimbate cu mutările 5—9, cu condiția ca succesiunea din fiecare grup să fie păstrată.

Această interschim-bare se poate dovedi necesară dacă M blochează un pion. Mutările 15 și 22 sînt mișcări de întîrziere, necesare numai dacă M este pe cîmpurile menționate. Mutarea) 23 este cerută numai dacă M trebuie forțat spre acea parte a tablei ocupată de regină.

Cît despre reversi, prea puțin se știe despre istoria sa timpurie. Se pare că jocul a apărut pentru prima oară la Londra în 1870, sub numele de „Jocul anexării” ; el era jucat pe o masă în formă de cruce. O a doua versiune, care folosea masa standard de șah (8 x 8), a fost botezat „Annex, un joc al inversării”. Prin 1888, numele se transformase în reversi și era în mare vogă în Anglia. Articole și cronici despre joc apăreau în 1888 în ziarul londonez „Queen”. Ceva mai tîrziu, o variantă numită „Reversi regal”, care folosea cuburi cu fețe diferit colorate, era fabricată și vîndută de o firmă „Jacques & Son”. (Pentru o descriere a acestei variante „regale” și o ilustrație a jocului însuși, vedeți cartea „Profesorului Hoffman” (Angelo Lewis), The Book of Table Games (Cartea jocurilor de masă, pp. 621—623).

Reversi și alte jocuri derivate din el se vînd de cîțiva ani încoace și în Statele Unite, sub nume foarte diferite. Milton Bradley a introdus în 1938 Cameleonul, o variantă a reversi-ului regal. Firma „Tryne Products” a pus pe piață prin 1960 o variantă sub numele de Las Vegas Backfire³. Exit, un joc apărut în Anglia în 1965, nu este altceva decît reversi jucat pe o masă cu cîmpuri circulare. Un capac fixat pe fiecare cîmp permite, prin simplă întoarcere, să scoată la iveală culorile roșu, albastru sau alb (neutru), eliminînd astfel nevoia de piese.

* To backfire — a produce un rezultat opus celui așteptat sau plănuit. — N.T.

24

RĂSPUNSURI

Poate oare un jucător de reversi să cîștige un joc în mai puțin de zece mutări, prin eliminarea tuturor pieselor adversarului? Răspunsul este Da. în articolul meu original din „Scientific American” dădeam ceea ce credeam pe atunci a fi jocul cel mai scurt posibil, primul jucător cîștigînd la a opta mutare. Dar doi cititori au descoperit jocuri și mai scurte.

D. H. Peregrine, de la Jesus College, Oxford, mi-a trimis următorul joc în șase mutări:

Primul jucător Al doilea jucător

28 29

36 37

38 45 54 35

34 27 20

Iar Jon Petersen, din Menlo Park (California), a găsit un joc de șase mutări ușor diferit:

Primul jucător Al doilea jucător

36 28

37 29 21 30

39 44

35 45 53

CAPITOLUL VII

împachetarea sferelor

Sferele de dimensiuni egale pot fi împachetate împreună în multe feluri diferite, dintre care multe au trăsături recreative remarcabile. Aceste trăsături pot fi înțelese fără a avea la îndemână modele, dar dacă cititorul poate face rost de vreo 30 de sfere, ele s-ar putea dovedi de mare folos la înțelegerea celor ce urmează. Poate că mingile de tenis de masă sînt cele mai bune în acest sens. Ele pot fi ușor lipite una de alta pentru a clădi modele rigide.

Mai întîi, să atacăm pe scurt problema bidimensională. Dacă aranjăm sferile într-o formație pătrată (vezi fig. 30, dreapta), numărul sferelor care intră în joc este fără îndoială un număr pătratic. Dacă formăm un triunghi (fig. 30, stînga), numărul sferelor este un număr triunghiular. Acestea sînt cele mai simple exemple de ceea ce anticii numeau „numere figurate”. Ele au fost intensiv studiate de matematicienii mai vechi (Blaise Pascal a scris un celebru tratat asupra lor) și, deși astăzi nu mai atrag atenția prea mult, ele furnizează o înțelegere intuitivă a multor aspecte ale teoriei elementare a numerelor.

Este, astfel, suficientă o privire la fig. 30, stînga, pentru a vedea că suma oricărui număr de întregi pozitivi consecutivi, începînd cu 1, este un număr triunghiular. Fig. 30, dreapta, arată, la rîndul său, că numerele pătratice sînt formate prin adunarea întregilor impari consecutivi, începînd cu 1. Figura 31 relevă imediat o interesantă teoremă, cunoscută și vechilor pitagoreici: fiecare număr pătratic este suma a două numere triunghiulare consecutive. Demonstrația

25

29

Fig. 30 Baza numerelor triunghiulare (stînga) și a numerelor pătratice (dreapta).

algebrică este simplă. Un număr triunghiular cu n unități pe o parte este suma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ deci poate fi exprimat prin formula

— $n(n + 1)$. Numărul triunghiular precedent are formula — $n(n - 1)$.

2 2

Dacă adunăm cele două relații și simplificăm, rezultatul este n^2 . Există oare numere care să fie simultan și pătratice și triunghiulare? Da, există infinit de multe astfel de numere. Cel mai mic dintre ele (excluzînd pe 1, care aparține oricărei serii figurate) este 36; seria continuă astfel: 1225, 41 616, 1 413 721, 48 024 900, ... Nu este ușor să se găsească o formulă pentru cel de al n -lea termen al acestei serii.

Analogi tridimensionali ai numerelor figurate plane pot fi obținuți clădind, cu sferile, piramide. Piramidele triunghiulare care au toate fețele triunghiuri echilaterale pot fi considerate modele pentru ceea ce se numesc numere tetraedrice. Ele formează seria 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ... și pot fi reprezentate prin formula — $n\{nA-$

6

$-f-1)(w-f-2)$, unde n este numărul de sfere de-a lungul unei muchii. Piramidele pătratice a-vînd baza un pătrat și fețele laterale triunghiuri echilaterale (fiind prin urmare jumătăți de octaedru) reprezintă numerele piramidale (pătratice) 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ... Ele au formula

2f

28

~49

Fig. 31 Numerele triunghiulare și cele pătratice sînt înrudite.

25

— «(» $-f-1)(2«+1)$. O piramidă pătratică poate fi împărțită p /intr-un

plan în două piramide tetraedrice adiacente, exact în același fel în care un pătrat poate fi împărțit în două triunghiuri adiacente printr-o linie dreaptă. (Dacă veți clădi modelul unui număr piramidal, stratul inferior al modelului trebuie ținut să nu se împrăștie; Acest lucru poate fi făcut plăsînd rigle sau scîndurele de-a lungul laturilor bazei.)

Multe dintre vechile enigme se bazează pe proprietățile acestor două tipuri de numere piramidale. De pildă, pentru a clădi un monument din ghiulele de tun (rotunde), care este numărul cel mai mic de ghiulele care pot fi mai întîi așezate pe sol în formă de pătrat, apoi reclădite sub formă de piramidă pătratică? Lucrul surprinzător în legătură cu răspunsul la această problemă (4900) este că el este singurul răspuns. (Demonstrația acestui fapt este grea și nu a fost dată decît în 1918.) Un alt exemplu: un vînzător de fructe expune portocalele în forma a două piramide tetraedrice. Adunînd apoi la un loc portocalele expuse, reușește să le reclădească ca o singură piramidă tetraedrică mai mare. Care este numărul minim de portocale de care are nevoie? Dacă cele două piramide mici au aceleași dimensiuni, răspunsul unic este 20. Care este răspunsul în cazul în care piramidele mici nu sînt

egale ?

Să ne închipuim acum că avem o cutie foarte mare, să zicem o ladă de pian, pe care dorim să o umplem cu cât mai multe bile cu puțință. Ce procedeu de împachetare vom utiliza ? Mai întâi formăm un strat împachetat cum se arată în fig. 32 (cercurile neumbrite, cu circumferințe subțiri). Cel de-al doilea strat se formează așezând alternativ bile în golurile lăsate de primul strat, așa cum se arată în figură prin cercuri umbrite și cu circumferințe îngroșate. Atunci când construim cel de-al treilea strat, putem alege între următoarele două procedee :

1. Așezăm fiecare bilă într-o gaură de tip A, care este situată deasupra unei bile din primul strat.

Dacă procedăm astfel, adică dacă așezăm bilele dintr-un anumit strat direct deasupra bilelor din stratul penultim, se obține o stuc-tură denumită împachetare compactă hexagonală.

2. Așezăm fiecare bilă într-o gaură de tip B, direct deasupra unei găuri din primul strat.

Dacă folosim acest procedeu pentru fiecare strat, adică dacă așezăm fiecare bilă dintr-un anumit strat direct deasupra unei bile din cel de-al treilea strat inferior, rezultatul este o structură cunoscută sub numele de împachetare compactă cubică. Atât piramida pătratică, cât și cea tetraedrică au o structură de împachetare de acest tip, deși într-o piramidă pătratică straturile sînt dispuse paralel cu fețele laterale și nu cu baza.

Atunci când construim straturile unei împachetări compacte, putem schimba ori de câte ori vrem tipul de împachetare de la hexagonal

26

Fig. 32 La împachetarea compactă hexagonală, sferile intră în găurile notate cu A ; la împachetarea cubică, ele intră în găurile notate cu B.

la cubic și înapoi, realizînd diferite forme hibride de împachetare compactă. În toate aceste forme — cubică, hexagonală și hibridă — fiecare bilă atinge alte 12 bile care o înconjură, iar densitatea împachetării (raportul dintre volumul sferelor și spațiul total) este în fiecare

caz -/ $VIS = 0,74048 \dots$, sau aproape 75 la sută.

Este oare aceasta cea mai mare densitate care poate fi obținută ? Fapt este că nu se cunoaște o densitate mai mare, dar într-un articol publicat în 1958 (asupra relației dintre împachetarea compactă și spume), H. S. M.

Coxeter, de la Universitatea din Torouto (Canada), a făcut surprinzătoarea observație că este probabil că împachetarea cea mai densă nu a fost găsită încă. Este adevărat că nu pot fi plasate mai mult de douăsprezece sfere în jurul altei sfere astfel ca toate să se atingă între ele — dar o a treisprezecea sferă, care aproape că atinge pe cea din mijloc, are totuși loc! Spre deosebire de cazul împachetării în plan, în împachetarea în spațiu există mult loc liber, ceea ce sugerează că trebuie să fie vreo formă de împachetare neregulată care să aibă densitatea mai mare decît 0,74. Nimeni nu a putut demonstra pînă acum că nu este posibilă o împachetare mai densă, și nici măcar că contactul în douăsprezece puncte pentru fiecare sferă este necesar pentru împachetarea cea mai densă. În urma lucrărilor lui Coxeter, George D. Scott, de la aceeași Universitate, a întreprins recent cîteva experiențe asupra împachetării întîmplătoare, turnînd

26

un mare număr de bile de oțel în rezervoare sferice, apoi cb/tărand aceste rezervoare pentru a afla densitatea împachetării. El/a găsit că o împachetare întîmplătoare stabilă are o densitate care/ variază de la aproximativ 0,59 la aproximativ 0,63. Astfel că da/ă există în adevăr o împachetare mai densă decît 0,74, ea va trebui dă. fie construită cu grijă, după un model la care încă nimeni nu ys-a gîndit.

Admițînd că împachetarea compactă este cea mai compactă, cititorii și-ar putea încerca istețimea la împachetat cu următoarea problemă extrem de înșelătoare. Interiorul unei cutii dreptunghiulare are baza de 10 x 10 cm și înălțimea de 5 cm. Care este $J > el$ mai mare număr de bile de 1 cm diametru care pot fi împachetate în acest spațiu? ■ , ' ,

Dacă cercurile compact-împachetate pe un plan se dilată uniform pînă cînd umplu interstițiile dintre ele, rezultatul este familiarul model hexagonal care poate fi văzut pe pardoseala de mozaic a multor săli de baie. (Aceasta explică de ce modelul este atît de răspîndit în natură : fagurele albinelor, pigmentii din retină, bulele din spuma aflată între două suprafețe plane care aproape se ating, suprafața anumitor alge diatome etc.) Ce se întîmplă atunci cînd sferile compact-împachetate se dilată uniform într-un vas închis, sau cînd sînt supuse unei presiuni uniforme din afară? Fiecare sferă devine un poliedru, fețele sale^corespunzînd unor plane care erau tangente în punctele sale de contact cu celelalte sfere. Împachetarea compactă cubică transformă fiecare sferă într-un dodecaedru rombic (fig. 33, sus), ale cărui 12 fețe sînt romburi congruente. Împachetarea compactă face din fiecare sferă un dodecaedru trapezo-rombic (fig. 33, jos), cu șase fețe rombice și șase trapezoidale. Dacă această figură este tăiată în două prin planul indicat în ilustrație, iar una dintre jumătăți este rotită cu 60 grade, ea devine un dodecaedru rombic.

În 1727, fiziologul englez Stephen Hales descria în cartea sa *Vege-table Staticks* (Statistica vegetalelor) cum a reușit să obțină „dodecaedre aproape regulate” punînd mazăre proaspătă într-o oală și comprimînd-o. Experiența a devenit cunoscută sub numele de „mazărea lui Buf fon” (deoarece mai tîrziu o experiență similară a fost relatată de contele de Buf fon1) și a fost acceptată fără rezerve de majoritatea biologilor, pînă cînd Edwin B. Matzke, un botanist de la Universitatea Columbia, a repetat, în cele din urmă, experiența. Din cauza dimen-

siunilor și formelor diferite ale boabelor de mazăre, a consistenței lor neuniforme și a împachetării întîmplătoare care rezultă atunci cînd sînt turnate în vas, formele boabelor după comprimare sînt prea diferite pentru a putea fi identificate. În experiențele sale, publi-

Georges Louis Leclerc, conte de Buffon, naturalist francez (1707 — 1788). — N.T.

27

Fig. 33 Sferile compact-împachetate se deformează în dodecaedre.

cate în 1939, Matzke a comprimat alice de plumb și a găsit că dacă sferile fuseseră împachetate compact cubic, se formează dodecaedre rombice, dar dacă împachetarea fusese întîmplătoare, predomină

27

Fig. 34 împachetarea dezlînată a lui Heesch și Laves. Mai întîi se împachetează sfere mari (stînga), apoi fiecare astfel de sferă este înlocuită cu trei sfere mai mici, obținîndu-se modelul din dreapta. Acesta are o densitate de numai 0,055.

forme neregulate cu paisprezece fețe. Aceste rezultate au consecințe importante, după cum a subliniat Matzke, asupra studiilor spumelor sau celulelor vii din țesuturile nediferențiate.

Problema împachetării celei mai compacte sugerează întrebarea contrară: Care este împachetarea cea mai puțin compactă? Ce structură rigidă are densitatea cea mai mică posibilă? Pentru ca o structură să fie rigidă, fiecare sferă trebuie să atingă cel puțin alte patru sfere, iar punctele de contact trebuie să nu fie toate într-o singură emisferă sau pe ecuatorul sferei. David Hilbert², în cartea sa Geometria și imaginația, publicată în 1932, descrie ceea ce se credea pe atunci a fi împachetarea cea mai dezlînată: o structură cu densitatea 0,123. În anul următor însă, doi matematicieni olandezi, Heinrich Heesch și Fritz Laves, au publicat detalii ale unei împachetări cu mult mai puțin strîns, avînd densitatea de numai 0,0555 (vezi fig. 34). Pro

a Matematician german, 1862-1943. - N.T.

27

bleirța dacă există sau nu alte împachetări și mai puțin compacte este > problemă foarte interesantă, care, ca și

problema împachetării celei mai compacte, rămîne încă nerezolvată.

\ ADAOS

Răspunsul unic de 4900 pentru numărul de ghiulele care să formeze atît un pătrat, cît și o piramidă cu baza

pătratică, a fost găsit de G. N. Watson, în „Messenger of Mathematics”, seria nouă, voi. 48, 1918, pp. 1—22.

Răspunsul fusese ghicit încă din 1875 de matematicianul francez Edouard Lucas. Henry Ernest Dudeney a

bănuit un rezultat similar în răspunsul la problema nr. 138 din cartea sa Amusements in Mathematics

(Amuzamente matematice), 1917.

Există o literatură bogată asupra numerelor care sînt simultan triunghiulare și pătratice. O mare parte din ea este

citată într-o notă editorială la problema nr. E 1473 din „American Mathematical Monthly”, februarie 1962, p.

169; tot acolo se dă următoarea formulă pentru cel de-al w-lea pătrat-triunghiular:

$$(17 - \sqrt{12\sqrt{2}})! + (17 - 12^2)^n - 2 \cdot 32$$

Problema împachetării regulate cea mai densă posibilă a sferelor a fost rezolvată pentru toate spațiile, pînă la opt

dimensiuni inclusiv. (Vezi Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, voi. 7, American Mathematical

Society, 1963, pp. 53 — 71). În spațiul tridimensional, răspunsul este împachetarea compactă regulată descrisă

mai înainte, care are o densitate de 0,74. Dar atunci cînd se ajunge la spațiul 9-dimensional, după cum observă

Constance Beid în cartea sa Introduction to Higher Mathematics (Introducere în matematica superioară), în

1959, problema ia una dintre acele bruște și misterioase întorsături care apar atît de des în geometriile spațiilor

euclidiene de ordin superior. După cîte cunosc, nimeni nu știe încă cum să împacheteze hipersfere în spațiul cu

nouă dimensiuni.

Acest spațiu cu 9 dimensiuni este punct de întoarcere și pentru problema înrudită a cîte sfere congruente pot fi

făcute să atingă o altă sferă de același diametru. Abia în anul 1953 K. Schutte și B. E. van der Waerden (în

articolul Problema celor treisprezece sfere, apărut în „Mathematische Annalen”, voi. 125, 1953, pp. 325—334),

au demonstrat pentru prima dată că răspunsul pentru spațiul tridimensional este 12. (Pentru o demonstrație mai

recentă, vezi articolul Problema celor treisprezece sfere de John Eeche, în „Mathematical

27

Gazette” voi. 40, nr. 331, februarie 1956, pp. 22—23.) Problema corespunzătoare din plan are răspunsul evident

6 (doar 6 monede pot atinge o altă monedă de aceeași mărime), iar dacă ne închipuim că o „sferă” degenerată

poate fi reprezentată printr-o dreaptă, răspunsul pentru spațiul unidimensional este 2. S-a arătat că pentru patru

dimensiuni, 24 de hipersfere pot atinge o a 25-a hipersferă, iar pentru spațiile cu 5, 6, 7 și 8 dimensiuni, numărul

maxim de hipersfere este de 40, 72, 126 și 240, respectiv. Pentru spațiul 9-dimensional, așa cum am spus,

problema rămîne nerezolvată.

RĂSPUNSURI

Numărul minim de portocale din care se pot clădi două piramide tetraedrice neegale și, de asemenea, o piramidă

tetraedrică mai mare, este 680. Acesta este un număr tetraedric care poate fi divizat în două numere tetraedrice

mai mici, 120 și 560. Muchiile celor trei piramide vor fi de 8, 14 și 15.

O cutie cu baza pătrată de 10 X 10 cm și cu înălțimea de 5 cm poate fi umplută cu bile de 1 cm diametru compact-împachetate într-un surprinzător număr de feluri, fiecare dintre ele permițând să fie introdus un număr diferit de bile. Numărul maxim, 594, se obține în felul următor: întoarceți cutia pe o parte și formați primul strat începând cu un rând de cinci, apoi de patru, apoi iarăși de cinci și așa mai departe. Este posibil să formați unsprezece rânduri (șase rânduri de câte cinci bile și cinci rânduri de câte patru bile), găzduind 50 de bile și lăsând un spațiu de mai mult de 0,3 cm liber. Cel de-al doilea strat va avea și el unsprezece rânduri, cu câte patru și cinci bile, alternativ, dar de data aceasta stratul va începe și se va sfârși cu rânduri de câte patru bile, astfel că numărul de bile găzduite în acest strat este de numai 49. (Ultimul rând de patru bile va depăși cu 0,28 cm marginea primului strat, dar întrucât acesta este cu 0,3 cm mai îngust decât cutia, este spațiu suficient pentru el.) În cutie pot fi plasate douăsprezece straturi (cu o înălțime totală de 9,98 cm), alteruind straturi de câte 50 de bile cu straturi de 49, pentru a da un total de 594 de bile.

CAPITOLUL VIII

Numărul transcendent Pi

Fața lui Pi era mascată și era lucru înțeles că nimeni nu o poate vedea fără a fi pedepsit cu moartea. Dar ochi pătrunzători priveau afară din mască, neîndurători, reci și enigmatice. i kj -, ••, -'a . , Bertrand Russell, Coșmarul matematicianului, în Nightmares of Eminent Persons (Coșmarurile unor oameni însemnați)

Raportul dintre circumferința unui cerc și diametrul său, simbolizat de vechii greci prin litera Pi, se ivește neinvitat în tot felul de locuri care nu au nimic de-a face cu cercurile. Matematicianul englez Augustus de Morgan scria odată despre Pi că „acest misterios 3,14159... bate la fiecare ușă sau fereastră și coboară chiar și pe coș”. Pentru a da un exemplu, dacă se alege la întâmplare două numere dintr-o mulțime de întregi pozitivi, care este probabilitatea ca ele să nu aibă un divizor comun? Răspunsul surprinzător este: șase împărțit la pătratul lui Pi. Totuși, faptul că Pi a devenit cel mai familiar element al unei clase infinite de numere transcendente se datorește mai ales legăturii sale cu cercul.

Ce este un număr transcendent? Acesta este de obicei descris ca un număr irațional care nu este soluția unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali. Rădăcina pătrată a lui 2 este un număr irațional, dar este un „irațional algebric”, deoarece este o soluție a ecuației $x^2 = 2$. Pi nu poate fi exprimat ca soluție a unei astfel de ecuații, ci numai ca limită a unui proces infinit de un anumit tip. Forma zecimală a lui Pi, ca și a tuturor numerelor iraționale, este fără sfârșit și neperiodică.

Nici o fracție care are întregi deasupra și dedesubtul liniei nu poate fi egală exact cu Pi, dar există foarte multe fracții simple care se apropie uimitor de mult de acest număr. Cea mai remarcabilă dintre

1 Matematician și logician englez, 1806—1871. — N.T.

28

ejt; a fost descoperită prin secolul al V-lea e.n. de vestitul astronom chinez Tu Ciung-Și, dar descoperirea sa nu a devenit cunoscută în Occident decât o mie de ani mai târziu. Putem obține această fracție piintr-un fel de hocus-pocus numeric. Scrieți primii trei întregi impari în perechi: 1, 1; 3, 3; 5, 5; puneți apoi pe ultimii trei deasupra primilor trei, formând astfel fracția 355/113. Greu de crezut, dar aceasta dă pe Pi cu o precizie de șase zecimale! Există și unele rădăcini care se apropie mult de Pi. Rădăcina pătrată a lui 10 (3,162...) a fost mult folosită în locul lui Pi în antichitate, dar rădăcina cubică a lui 31 (3,1413...) este mult mai apropiată (mai mult chiar: 31 cuprinde primele două cifre ale lui Pi). Un cub cu volumul de 31 cm³ ar avea o muchie care ar diferi de Pi cu mai puțin de o miime de centimetru. Iar suma dintre rădăcinile pătrate ale lui 2 și 3 este 3,146..., iarăși o aproximație bună.

Încercările timpurii de a găsi valoarea exactă a lui Pi au fost strâns legate de încercările de a rezolva clasică problemă a cvadraturii cercului. Folosind numai un compas și o riglă, este oare posibil să construim un pătrat cu aria exact egală cu a unui cerc dat? Dacă Pi ar putea fi exprimat ca o fracție rațională sau ca rădăcina unei ecuații de gradul unu sau doi, atunci ar fi posibil să construim cu compasul și rigla o linie dreaptă lungă exact cât circumferința cercului. Transformarea cercului în pătrat ar urma imediat. Am avea doar să construim un dreptunghi cu o latură egală cu raza cercului și cealaltă egală cu jumătatea circumferinței. Dreptunghiul are o suprafață egală cu cea a cercului și există procedee simple de a converti dreptunghiul într-un pătrat cu aceeași suprafață. Reciproc, dacă cercul ar putea fi transformat în pătrat, s-ar crea un mijloc de a construi un segment de dreaptă egal exact cu Pi. Din păcate, există probe de necontestat că Pi este transcendent și că nu poate fi construită cu compasul și rigla o linie dreaptă de lungime transcendentă.

Există sute de construcții aproximative pentru Pi, dintre care cea mai exactă este bazată pe fracția astronomului chinez, menționată mai înainte. Într-un sfert de cerc cu raza egală cu unitatea, desenați liniile indicate în fig. 35, astfel ca segmentul BC să fie egal cu 7/8 din rază, DG să fie 1/2 din rază, DE să fie paralel cu AC, iar DF paralel cu BE. Se poate ușor arăta că FG este egal cu 16/113, sau 0,1415929... Întrucât 355/113 poate fi scris ca $3 - \frac{16}{113}$, desenați o linie de trei ori mai lungă decât raza, prelungiți-o cu un segment egal cu FG și veți obține o linie care diferă de Pi prin mai puțin de o milionime dintr-o unitate.

Nenumărați adepți ai cvadraturii cercului și-au închipuit că au descoperit o valoare exactă pentru Pi, dar nici unul nu l-a întrecut

pe filozoful englez Thonias Hobbes² în a combina o mare înălțime a spiritului cu o profundă ignoranță. Pe vremea aceea, matematica nu se predă în școlile engleze, așa că Hobbes a găsit* primul prilej să arunce o privire asupra lucrărilor lui Euclid abia spre vârsta de 40 de ani. Când a citit o formulare a teoremei lui Pitagora, Hobbes a exclamat: „Dumnezeule, dar asta e imposibil!” Dar după asta, el s-a străduit să parcurgă tot drumul înapoi către demonstrație, convingându-se în cele din urmă că este adevărat. Pentru tot restul vieții, Hobbes a rămas cu o pasiune pentru geometrie. „Geometria are în ea ceva în felul vinului”, scria el mai târziu. Se spune că, atunci când nu avea la îndemână suprafețe mai potrivite, Hobbes obișnuia să deseneze tot felul de figuri geometrice pe mînele cămășii sau pe cearșafuri.

2 1588-1679. - N.T.

Dacă Hobbes s-ar fi mulțumit să rămînă matematician amator, cei din urmă ani ai vieții sale ar fi fost mai liniștiți — dar egotismul său imens l-a determinat să creadă despre el că ar fi în stare de mari descoperiri matematice. Da vârsta de 67 de ani, în 1655, el a publicat în limba latină o carte cu titlul *De corpore* (Despre trup), care cuprindea o ingenioasă metodă de a transforma cercul în pătrat. Metoda este o excelentă aproximație, dar Hobbes era convins că este exactă. John Wallis, un distins matematician și criptograf englez al epocii³, a expus toate erorile lui Hobbes într-un pamflet, pornind astfel unul dintre cele mai lungi, mai amuzante și mai inutile duiele verbale care a avut vreodată loc între două minți strălucite. El a durat aproape un sfert de secol, fiecare dintre cei doi adversari trecînd pe rînd de la sarcasmul abil la insulta înveninată. Wallis îl continua, în parte, pentru propriul său amuzament și, îndeosebi, ca un mijloc de a-l pune pe Hobbes într-o postură ridicolă, aruncînd astfel sămînța îndoielii asupra părerilor politice și religioase ale acestuia, pe care le detesta. Hobbes a răspuns la cel dintîi atac al lui Wallis, republicîndu-și cartea în limba engleză cu un supliment numit *Six Lessons to the Professors of Mathematics*. . . (Șase lecții pentru profesorii de matematică) (sper că cititorii mă vor ierta pentru că scurtez nesfîrșitele titluri ale secolului al XVII-lea). Wallis răspunse cu *Due Correction for Mr. Hobbes in School Discipline for not saying his Lessons right* (Pedeat>c3 meritată pentru dl. Hobbes, pentru că nu știe lecția bine). Hobbes replică cu *Marks of the Absurd Geometry, Rural Language, Scottish Church Politics, and Barbarisms of John Wallis* (Note pentru John Wallis la Geometria absurdă, limbaj țărănesc, Politică religioasă scoțiană și Barbarisme); la aceasta, Wallis îi răspunse cu *Hobbiani Puneti Disruptio ! or the Undoing of Mr. Hobbes's Points* (Dejucarea argumentelor d-lui Hobbes). Ceva mai târziu (după ce își mai publicase anonim la Paris și o metodă absurdă de dublare a cubului), Hobbes scria: „Sau eu singur sînt nebun, sau ei toți (profesorii de matematică) și-au pierdut mințile; nu văd o părere de mijloc — doar dacă nu va veni altcineva care să spună că toți am înnebunit”.

„Afirmația d-lui Hobbes nu poate fi combătută, răspunse Wallis. Pentru că dacă el ar fi nebun, ar fi extrem de improbabil să fie convins prin rațiune de acest lucru; pe de altă parte, dacă noi toți am fi cei nebuni, n-am avea calificarea necesară pentru a încerca să o facem”.

Bătălia a continuat, cu perioade scurte de armistițiu, pînă la moartea lui Hobbes, la vârsta de 91 de ani. „Dl. Hobbes nu a provocat niciodată pe nimeni, scria Hobbes în unul dintre ultimele sale atacuri

3 1616-1703. - .v.r.

Pagina de titlu a uneia dintre cărțile lui Hobbes despre cvadratura cercului.

D C

Fig. 36 Cea dintîi metodă a lui Hobbes de a transforma cercul într-un pătrat.

asupra lui Wallis (în paranteză fie spus, Hobbes era extrem de timid în relațiile sale sociale); dar, dacă este provocat, pana lui se poate dovedi la fel de ascuțită ca a dv. Tot ce ați spus pînă acum este eroare și răutate; altfel spus, vînt rău mirositor, asemenea celui lăsat de o mîrtoagă cu burta prea plină atunci cînd este înșeuată. Am spus ceea ce aveam de spus. Pînă acum v-am acordat toată atenția, dar promit să nu se mai repete...”

Nu este locul aici să intrăm în amănunte asupra a ceea ce Wallis numea „incapacitatea curioasă a d-lui Hobbes de a învăța ce nu știe”. Hobbes a publicat în total aproximativ o duzină de metode diferite de transformare a cercului în pătrat. Cea dintîi dintre ele — și una dintre cele mai bune — este arătată în fig. 36. În interiorul unui pătrat cu latura egală cu unitatea, desenați arcele AC și BD. Ele sînt sferturi de arc ale unor cercuri cu raza unitară. Împărțiți prin punctul Q arcul BF în două părți egale. Desenați linia RQ paralelă cu latura pătratului și apoi prelungiți-o astfel ca $QS = RQ$.

Desenați linia FS, prelungind-o pînă cînd întâlnește în T latura pătratului. Hobbes afirma că BT este exact egal cu arcul BF. Deoarece arcul BF este $1/12$ din circumferința cercului cu raza egală cu unitatea, Pi va* fi de șase ori mai mare decît BT. Aceasta dă pentru Pi o valoare de 3,1419. . .

Una dintre dificultățile majore ale filozofului englez a fost incapacitatea sa de a înțelege că punctele, liniile și suprafețele trebuie considerate în abstract, ca avînd mai puțin de trei dimensiuni. „Hobbes pare a fi mers la groapă cu convingerea fermă că suprafețele au atît adîncime, cît și grosime, în ciuda tuturor raționamentelor și argumentelor geometrilor timpului”, scria Isaac Disraeli în cartea sa *Quarrels of Authors* (Certurile autorilor).

Hobbes reprezintă cazul clasic al unui om de ge- Fig- 37 cîte pătrate conține această vază? niu, care se aventurează într-o ramură a științei pentru care este slab pregătit și care își cheltuiește astfel marea sa energie creatoare în tot felul de absurdități pseudo-științifice.

Deși cercul nu poate fi transformat în pătrat, există multe figuri mărginite de arce de cerc, care pot fi; acest fapt întreține încă multe false speranțe în grupurile de adepți ai cvadraturii cercului. Un exemplu interesant este ilustrat în fig. 37. Partea inferioară a acestei vase este trei sferturi din circumferința unui cerc cu un diametru de, să zicem, 10 cm. Partea superioară este mărginită de trei sferturi de arc dintr-un cerc cu aceleași dimensiuni. Cît de repede ați putea calcula lungimea exactă (pînă la ultima zecimală) a unei laturi a pătratului care are aceeași arie ca și figura dată?

Rude apropiate cu adepții cvadraturii cercului au fost și calculatorii numărului Pi — oameni care și-au închinat ani calculării cu mîna a mai multor zecimale ale lui Pi decît fuseseră înainte vreodată calculate. Acest lucru poate fi făcut, desigur, folosind oricare expresie

30

infinită care converge către Pi. Wallis însuși a descoperit una dintre cele mai simple :

„/2 2446688 1

7T=2-X-X-X-X-X-X-X-X

[1 3355779 J

Numărătorii acestor fracții sînt numere pare consecutive, luate în perechi. (Observați asemănarea întîmplătoare dintre primii cinci numitori și cifrele din fracția astronomului chinez!) Cîteva zeci de ani mai tîrziu, filozoful și matematicianul german Gottfried Wilhelm von Leibniz a găsit o altă formulă frumoasă:

7t=4-----V — ••

\1 3 5 7 9

Cel mai neobosit dintre calculatorii lui Pi a fost matematicianul englez William Shanks. în ceva mai mult de 20 de ani, el a reușit să calculeze 707 zecimale ale lui Pi. Dar vai! la cea de-a 528-a zecimală, Shanks a făcut o mică greșală, așa că tot restul pînă la 707 este greșit. (Acest amănunt a fost descoperit abia în 1945, așa că zecimalele lui Shanks mai pot fi găsite în multe cărți.) în 1949, calculatorul electronic ENIAC a calculat mai mult de 2000 de zecimale ale lui Pi, în timp de 70 de ore-mașină; ceva mai tîrziu, un alt calculator electronic a dus performanța pînă la 3000 de zecimale, în 13 minute. Prin 1959, numărul zecimalelor a fost majorat la 10 000 de un calculator francez și de un altul britanic.

Unul dintre cele mai stranii aspecte ale zecimalelor lui Shanks era faptul că acestea păreau să disprețuiască cifra 7. în primele 700 de zecimale, fiecare cifră apărea cam de 70 de ori, așa cum și trebuie — în timp ce 7 apărea abia de 51 de ori. „Dacă toți apocalipticii și-ar uni forțele pînă cad de acord în legătură cu acest fenomen, nepublicînd nimic pînă nu ajung la unanimitate, atunci poate că și-ar cîștiga în cele din urmă recunoștința omenirii”, scria De Morgan. Mă grăbesc să adaug că valoarea corectată a lui Pi, pînă la 700 de zecimale, a restaurat pe 7 în drepturile sale. Școala matematică intui-ționistă, care susține că nu se poate spune despre o afirmație că este „fie adevărată, fie falsă” atîta timp cît nu s-a găsit o cale de a verifica ambele posibilități, a folosit mult timp următorul exemplu: „Există trei cifre 7 consecutive printre zecimalele lui Pi”. Acum afirmația trebuie reformulată, punîndu în loc de trei, cinci. Cifrele recente ale lui Pi arată nu numai numărul așteptat de tripleți pentru fiecare cifră, dar și cîteva grupuri de 7777 (și chiar un neașteptat 999999).

Pînă în momentul de față, Pi a trecut toate examenele statistice

4 1646-1716. - n.t.

30

pentru a fi declarat „număr întîmplător” (aleatoriu). Acest lucru poate părea inexplicabil celor care sînt de părere că o curbă atît de simplă și de frumoasă, cum este cercul, trebuie să posede un raport dintre lungimea drumului de jur împrejur și lungimea drumului de-a curmezișul cel puțin la fel de simplu și frumos — dar matematicienii sînt convinși că niciodată nu va putea fi găsită în dezvoltarea zecimală a lui Pi vreo urmă de tipic sau de ordine. Desigur, cifrele nu sînt întîmplătoare, în sensul că ele sînt aranjate astfel ca să reprezinte valoarea numărului Pi; dar în acest ^sens nu sînt întîmplătoare nici cele un milion de cifre publicate de Compania „Rand” din California. Și acestea reprezintă tot un singur număr — și încă un număr întreg !

Dacă este adevărat că cifrele lui Pi sînt întîmplătoare, poate că este justificat să susținem un paradox oarecum similar cu afirmația că dacă un grup de maimuțe ar bate un timp destul de lung pe clapele unor mașini de scris, ele ar reuși în cele din urmă să rescrie toate piesele lui Shakespeare. Stephen Barr a arătat că dacă nu este impusă o limită pentru precizia cu care pot fi construite și măsurate două bare, atunci aceste două bare simple, fără nici un fel de marcaj pe ele, pot comunica întreaga Encyclopaedia Britannica⁵. Una dintre bare este luată ca unitate. Cealaltă diferă de unitate printr-o fracție care este exprimată ca un număr zecimal foarte lung. Această formă zecimală a fracției codifică enciclopedia prin procedeul care constă în a atribui fiecărui cuvînt și semn de punctuație al limbii cîte un număr diferit (care nu-1 include pe zero ca cifră a numărului). Cifra zero este folosită la separarea numerelor de cod. în mod evident, în acest fel întreaga enciclopedie poate fi codificată printr-un singur, dar nesfîrșit de lung, număr. Puneți virgula și cifra 0 în fața acestui număr și adăugați 1 — și veți obține

lungimea celei de-a doua bare.

Dar unde intervine aici Pi ? Ei bine, dacă cifrele lui Pi sînt cu adevărat întîmplătoare, atunci pe undeva prin această plăcintă infinită trebuie să se găsească o felie pe care este înscrisă, ca răvaș, și Encyclopaedia Britannica; sau, la fel de probabil, orice carte care a fost vreodată scrisă, va fi scrisă, sau ar putea fi scrisă.

ADAOS

Ea 29 iulie 1961, adică la un an după ce materialul acestui capitol a apărut în „Scientific American”, Pi a fost dus pînă la 100 265 de zecimale de către calculatorul IBM 7090 de la IBM Data Center, din New York. Eucrarea a fost făcută de Daniel Shanks (care nu este rudă cu William Shanks; este vorba de numai încă 6 Celebră enciclopedie engleză în mai multe volume, apărută în numeroase ediții —N.T.

31

una dintre acele stranii coincidențe numerologice care marchează istoria lui Pi) și John W. Wrench, jr. Timpul de lucru a fost cu un minut mai lung decît opt ore, după care a mai fost nevoie de încă 42 de minute pentru a transforma rezultatul binar în formă zecimală. A calcula pe Pi cu cîteva mii de zecimale a devenit acum un procedeu obișnuit de verificare a noilor calculatoare și de instruire a programatorilor. „Misteriosul și minunatul Pi — scrie Philip J. Davis în cartea sa The Lore of Large Numbers (Legendele numerelor mari) — a fost acum redus la o gargară cu ajutorul căreia mașinile de calculat își curăță gîtul”.

Probabil că nu va mai trece multă vreme pînă cînd Pi va fi cunoscut cu un milion de zecimale. Antici-pînd aceasta, dr. Matrix, cunoscutul numerolog, mi-a trimis o scrisoare prin care mă roagă să dau publicității precizarea sa că cea de-a milioana cifră a lui Pi va fi 5. Calculul său se bazează pe Cartea a IH-a a Bibliei Regelui Iacob, capitolul 14, versetul 16 (care menționează numărul 7, iar cel de-al șaptelea cuvînt are cinci litere) și pe anumite calcule obscure în care intră constanta lui Euler6 și numărul transcendent e.

10cm

Fig. 38 Modul de împărțire a vasei în pătrate.

31

Fig. 39 Trei bucăți din vază formează un pătrat.

Norman Gridgeman, din Ottawa (Canada), mi-a trimis observația eă cele două bare ale lui Barr pot fi reduse la una singură prin trasarea unui semn pe una din ele. Semnul împarte bara în două lungimi, al căror raport codifică Encyclopaedia Britannica în același fel ca înainte.

RĂSPUNSURI

S-a sugerat ca cititorul să găsească latura unui pătrat egal ca arie cu profilul de vază din fig. 38, care este mărginit de arce dintr-un cerc cu diametrul de 10 cm. Răspunsul este tot 10 cm. Dacă desenăm pătratele punctate ca în figură, este evident că segmentele de cerc A, B, C se potrivesc în spațiile A', B', C, formînd două pătrate cu o arie totală de 100 cm². Fig. 39 arată modul în care vaza poate fi transformată în pătrat prin tăiere în numai trei părți, care formează un pătrat cu latura de 10 cm.

31

CAPITOLUL IX

Victor Eigen, matematicianul

Lujin nu avu greutăți în a învăța mai multe trucuri cu cărți... în modul ingenios și precis în care trucul lua sfîrșit, el găsea o plăcere misterioasă și o vagă promisiune a unor bucurii încă neexplorate. . . Vladimir Nabokov, The Defense

Un număr din ce în ce mai mare de vrăjitori amatori atrași de matematică își îndreaptă în ultima vreme atenția către „mate-magică” : trucuri care se sprijină solid pe principii matematice. Vrăjitorii profesioniști fug de ele pentru că sînt prea cerebrale și prea plicticoase pentru cei mai mulți dintre clienți. Dar ca scamatorii de cafenea, prezentate mai mult ca enigme spirituale decît ca performanțe magice, ele se pot dovedi interesante și distractive. Prietenul meu Victor Eigen, inginer electronist și fost președinte al Frăției americane a măștrilor baghetei, reușește să se păstreze foarte la zi cu ultimele realizări în acest domeniu curios. Cu speranța de a găsi ceva material mai neobișnuit pentru acest capitol, i-am făcut într-o zi o vizită.

Ușa de la intrare mi-a fost deschisă chiar de Victor — un om de vreo 55 de ani, plinuț, cu părul cărunt și cute adînci în jurul ochilor.

— Te superi dacă o să stăm în bucătărie ? m-a întrebat în timp ce mă conducea pe scări. Soția mea urmărește un program la televizor și ar fi mai bine să n-o deranjăm pînă nu se termină. Cum mai bei acum bourbonul? Ne-am așezat de o parte și de alta a mesei din bucătărie și am ciocnit paharele.

— Să trecem la matematică, i-am spus. Ce mai e nou?

Victor nu a stat mult pe gînduri, și a scos un pachet de cărți din buzunarul cămășii.

31

— Ultimul răcnet la cărți, spuse el, este principiul lui Gilbreath. Este o teoremă extravagantă descoperită de Norman Gilbreath, un tînr magician din California.

Pe măsură ce vorbea, degetele lui scurte aranjau cu dexteritate pachetul, astfel ca cele două culori, roșul și negrul, să alterneze.

— Știi, desigur, că amestecarea obișnuită, prin împărțirea pachetului în două și apoi prin introducerea cărților dintr-una din jumătăți printre cărțile din cealaltă, este teribil de neeficientă ca metodă de așezare a cărților într-o ordine întâmplătoare ?

— Nu, nu știam, i-am răspuns. Victor își ridică sprâncenele.

— Ei bine, zise el, poate că asta o să te convingă. Te rog amestecă acest pachet în felul tău tradițional.

Am împărțit pachetul în două și l-am amestecat cum știam.

— Acum privește cărțile, zise Victor. Ai să vezi că aranjarea dinainte, cu cele două culori alternând, a fost distrusă bine de tot.

— Bineînțeles!

— Acum taie, continuă el. Dar ai grijă să tai între două cărți de aceeași culoare. Apoi dă-mi pachetul cu fața în jos.

Am făcut așa cum mi-a spus. Victor ținu apoi pachetul sub masă, așa ca nici unul dintre noi să nu-l vedem.

— Acum o să încerc să disting culorile numai prin pipăit, scoțind pe masă cărțile în perechi, roșu și negru, spuse.

Bineînțeles, prima pereche pe care a pus-o pe masă consta dintr-o carte roșie și una neagră. Ea fel și a doua. Până la urmă a scos vreo duzină de astfel de perechi.

— Dar cum. . . ?

Victor întrerupse rîzînd. Scoase restul pachetului de sub masă și începu să ia din el cărți, două câte două; fiecare pereche conținea o carte roșie și una neagră.

— Nimic mai simplu, explică el. Amestecarea și tăierea distruge alternația dintre roșu și negru, asta e drept, dar lasă cărțile foarte ordonate. Fiecare pereche mai conține încă ambele culori. Amintește-ți, te-am rugat să tai între două cărți de aceeași culoare.

— Dar nu pot totuși să cred. . .

— Gîndește-te o clipă și ai să vezi cum merge, dar nu cred că e ușor să fac demonstrația în numai cîteva cuvinte. Dar fiindcă veni vorba, prietenul meu Edgar N. Gilbert, de la laboratoarele Bell Tele-phone, a inclus o interesantă enigmă, asemănătoare cu aceasta, într-un articol încă nepublicat asupra amestecării cărților și teoriei informației. Iată cum arată.

Și îmi înmîină o foaie de hîrtie pe care erau tipărite următoarele litere :

32

TEVEHEDINSAGMEEREIENATGOV R ARGIANESTYOFOFIFFOSHHRVEM E V S O

— Este o frază trunchiată, spuse el, luată dintr-un articol apărut acum cinci ani în „Scientific American”. Gilbert a scris fiecare literă pe cîte o carte, apoi a aranjat pachetul astfel ca fraza să reiasă citind rînd pe rînd cărțile de sus în jos. A tăiat cărțile în două, le-a amestecat, apoi a copiat noua secvență de litere. După cum mi-a spus chiar el, unei persoane mediocre îi trebuie cam o jumătate de oră să afle care este fraza de la care s-a pornit. Esențialul este că amestecul obișnuit este un atît de anemic distrugător al informației purtate de secvența originală, iar redundanța anumitor combinații de litere în limba engleză atît de mare, încît este extrem de improbabil ca mesajul găsit în cele din urmă să fie diferit de cel corect. De fapt, Gilbert a calculat exact această probabilitate în articolul său-

Mi-am amestecat gînditor cuburile de gheață din pahar.

— Înainte de a țî-l umple din nou, spuse Victor, dă-mi voie să-ți arăt o ingenioasă experiență de precizie. O să am nevoie de paharul tău și de nouă cărți de joc.

Aranja cele nouă cărți, cu valori de la unu la nouă, pe masă, sub forma binecunoscută a careului magic de trei pe trei (fig.40). Toate cărțile erau cupe, cu excepția cinciului de pică, așezat în mijloc. Victor scoase un plic din buzunar și-l puse lîngă pătrat.

— Acum o să te rog să-ți așezi paharul pe oricare dintre aceste nouă cărți, dar mai întîi lasă-mă să-ți explic că în plic am pus cîteva instrucțiuni. Ele sînt bazate pe presupunerile mele în legătură cu cartea pe care o vei alege și cu felul în care-ți vei muta paharul de pe o carte pe alta. Dacă presupunerile mele sînt corecte, paharul își va sfîrși drumul pe cartea din centru.

Eovi de cîteva ori cu degetul cinciul de pică.

— Acum pune te rog paharul pe oricare carte, inclusiv cea din centru, dacă vrei.

îmi așezai paharul pe doiul de cupă.

— Exact cum mă așteptam, zîmbi Victor.

Apoi scoase din plic o fișă, pe care o ținu așa ca să pot citi următoarele instrucțiuni:

1. Dă deoparte șaptele.
2. Mută de șapte ori și dă deoparte optul.
3. Mută de patru ori, dă deoparte doiul.
4. Mută de șase ori, dă deoparte patrul.
5. Mută de cinci ori, dă deoparte pe nouă.
6. Mută de două ori, dă deoparte treiul.

32

Fig. 40 Aranjarea cărților și a paharului pentru o experiență de prezicere.

7. Mută o singură dată, dă deoparte șasele.

8. Mută de șapte ori, dă deoparte asul.

O „mutare” — explică el — constă din a trece paharul pe o carte vecină, deasupra, dedesubt sau lateral, dar nu și diagonal. Urmai instrucțiunile cu grijă, muțind cît mai la întîmplare puteam. Spre marea mea surpriză, paharul nu se oprea niciodată pe o carte care trebuia dată deoparte, iar după ce am dat opt cărți deoparte—iată și paharul meu sînd liniștit pe cinciul de pică, exact așa cum prezisese Victor!

33

— M-ai ameuțit complet, mărturisii. Să zicem că aș fi pus inițial paharul pe șaptele de cupă, prima carte înlăturată?

— Trebuie să-ți mărturisesc că a intrat și un strop de fraudă nematematică în toată povestea ^sta. Aranjarea în formă de careu magic nu are nimic de-a face cu esența trucului. Doar pozițiile cărților contează. Cele aflate în poziții impare — cele patru colțuri și centrul — formează o mulțime; cele din pozițiile pare formează o mulțime de paritate opusă. Cînd am văzut că ai pus paharul pe o carte din prima mulțime, ți-am arătat instrucțiunile pe care le-ai urmat. Dacă l-ai fi pus pe o carte din mulțimea pară, aș fi întors plicul pe partea cealaltă înainte de a scoate foaia.

În adevăr, pe partea cealaltă a foii era scris un al doilea set de instrucțiuni:

1. Dă deoparte șasele.

2. Mută de patru ori și dă deoparte doiul.

3. Mută de șapte ori, dă deoparte asul.

4. Mută de trei ori, dă deoparte patrul.

5. Mută o dată, dă deoparte șaptele.

6. Mută de două ori, dă deoparte pe nouă.

7. Mută de cinci ori, dă deoparte op tul.

8. Mută de trei ori, dă deoparte treiul.

— Vrei să spui că aceste două seturi de instrucțiuni — unul pentru cazul cînd pornesc de la o carte aflată într-o poziție pară, iar celălalt dacă pornesc de la o poziție impară — vor ghida întotdeauna paharul spre centru?

Victor aprobă din cap.

— De ce n-ai publica oare ambele instrucțiuni în cartea aceea a ta, cerîndu-le cititorilor să găsească cum merge trucul?

După ce-mi umplu paharul, Victor spuse:

— Există un număr destul de mare de trucuri de tip ESP1 care se bazează pe principiul parității. Iată unul care în aparență cere oarecare talente de prezicător.

Și îmi întinse o foaie de hîrtie goală și un creion.

— În timp ce eu stau întors cu spatele, aș vrea să desenezi o curbă închisă foarte complicată, care se întretaie pe sine însăși de foarte multe ori, dar niciodată mai mult decît o dată într-un punct dat.

Apoi își întoarse scaunul cu fața spre perete, iar eu desenai curba care se vede în fig. 41.

1 ESP — abreviere de la „Extrasensory Perception” (percepție extrasenzorială), percepție sau comunicare în afara activității senzoriale normale, ca în telepatie sau clarviziune. — N.T.

33

Fig. 41 Curbă închisă, desenată și marcată la întîmplare, pentru o altă experiență de prezicere.

— Acum notează fiecare intersecție cu o literă diferită, spuse Victor peste umăr.

Făcui așa cum mi-a spus.

— Acum pune creionul oriunde pe curbă și începe să urmărești curba. De fiecare dată cînd dai de o intersecție, spune cu glas tare litera pe care o găsești. Ține-o așa pînă cînd ai trasat toată curba, dar într-un anumit punct' pe parcurs — indiferent care — schimbă ordinea în care-mi citești două litere. Aceste două litere trebuie să fie vecine pe curbă. Nu-mi spune atunci cînd le interschimbi.

Pornii din punctul N, în sus spre punctul P și continuai de-a lungul curbei, numind cu voce tare literele pe măsură ce ajungeam la ele. Am văzut că Victor le scria într-un carnețel. Cînd m-am apropiat a doua oară de B, văzui că litera de după B pe curbă era F, așa că citii întii pe F și apoi pe B. Am făcut bineînțeles interschimbarea fără nici o variație în ritmul citirii, așa ca Victor să nu aibă vreo bănuială asupra perechii pe care am schimbat-o. De îndată ce terminai, el spuse :

— Ai schimbat B cu F.

— Uluitor! exclamai. Cum ai aflat ? Victor zimbi și se întoarse spre mine.

— Trucul se bazează pe o teoremă topologică care este foarte importantă în teoria nodurilor. O poți găsi foarte frumos demonstrată în cartea lui Hans Rademacher și Otto Toeplitz, Despre numere și figuri².

Își întoarse spre mine carnețelul pe care scrisese literele citite de mine. Literele erau scrise deasupra și dedesubtul unei linii orizontale, astfel:

NSGQIRTKDMTFCFHOPUJAE PIBHLSCUERGQKBTJAODNMV

— Dacă nu se face nici o interschimbare, explică el, atunci fiecare literă trebuie să apară o dată deasupra și o

dată dedesubtul liniei. Tot ce am de făcut este să caut o literă care apare de două ori sus și o literă care apare de două ori jos. Acestea vor fi literele care au fost interschimbate.

— Extraordinar! zisei.

Victor deschise o cutie de biscuiți, scoase doi dintre ei și-i puse pe masă, unul la dreapta și altul la stînga sa. Pe fiecare desenă o săgeată îndreptată spre nord (fig. 42). Apucă biscuitul din stînga între dege-

34

Fig. 42 Cum trebuie ținută biscuiții în misterul celor două săgeți.

lul mare și cel mijlociu, apoi apăsă cu arătătorul de colțul A. Biscuitul se învîrte în jurul axei diagonale care trecea prin cele două colțuri ținute și se întoarse cu fața cealaltă înaintea. Victor zgîrie pe această față o altă săgeată îndreptată spre nord.

Cu biscuitul din dreapta procedă la fel, cu mîna dreaptă, rotația fiind efectuată prin împingere cu arătătorul asupra colțului B. De data aceasta însă, desenă o săgeată îndreptată spre sud.

— Acum totul este gata pentru un amuzant tur de forță legat de simetria de rotație a pătratului, spuse Victor, zîmbind. Trebuie să reții că în mîna stînga am un biscuit cu cîte o săgeată îndreptată spre nord pe ambele fețe. Lăsa biscuitul cu mîna stînga și-l învîrte de cîteva ori, ca să văd că pe ambele părți săgeata arăta spre nord.

— Iar pe biscuitul din dreapta, am două săgeți care sînt îndreptate în sensuri opuse, zise Victor, apucînd biscuitul cu mîna dreaptă și rotindu-l repede de cîteva ori.

Puse biscuitul pe masă. Apoi, lent și fără a modifica orientările lor, schimbă pozițiile celor doi biscuiți între ele.

— Acum, te rog repetă tu însuși experiența. Vreau să verifici faptul că biscuitul care are două săgeți arătînd spre nord se află acum în dreapta mea, iar celălalt în stînga.

34

îmi împinse cei doi biscuiți și eu îi învîrtii exact în același fel în care o făcuse el, unul în mîna dreaptă și altul în mîna stînga: într-adevăr, biscuiții erau interschimbați.

Victor își trase biscuiții mai aproape, apoi le schimbă încetîșor pozițiile între ele, aducîndu-i pe locurile pe care ei fuseseră la început. Roti biscuitul din partea dreaptă. Am rămas foarte surprins să văd că acum săgețile erau îndreptate spre nord pe ambele părți! Iar cînd învîrte și cel de-al doilea biscuit, săgețile sale erau îndreptate alternativ către sud și către nord !

— Încearcă și tu, zise Victor. Ai să vezi că jocul merge automat. De fapt, cei doi biscuiți sînt exact la fel.

Diferența pe care o notaseși în așezarea săgeților depinde întru totul de mîna în care țineam biscuitul. Cînd ceri partenerului să verifice jocul, asigură-te că ia biscuitul din dreapta ta în mîna lui stînga, iar biscuitul din stînga ta, cu mîna lui dreaptă. Și fii atent ca el să pună pe masă biscuitul cu săgeți îndreptate în sensuri contrarii, astfel ca săgeata de pe partea de deasupra să fie îndreptată spre nord.

Dădui paharul pe gît. În sticlă mai rămăsese doar foarte puțin. Bucătăria părea puțin înclinată.

— Acum lasă-mă să-ți arăt eu una, zisei, luînd încă un biscuit. E un fel de test de probabilitate. Voi arunca biscuitul în sus. În cazul cînd cade cu una din fețe în sus, poți să-ți torni restul de bourbon. În caz cînd nu cade cu nici o față în sus — și ținui biscuitul perpendicular pe masă, dar fără a face vreun comentariu — atunci eu sînt cel care beau ultima picătură.

Victor mă privi bănuitor.

— Bine, zise el.

Strînsei biscuitul în pumn și aruncai fărîmele în aer. Einiște deplină. Chiar și frigiderul părea că încetase să mai zîbîrnie.

— Văd că cele mai multe din ambele fețe ți-au căzut pe cap, zise în cele din urmă Victor, rîzînd. Și aș mai putea să adaug că e un truc pe care nu se cuvine să-l faci unui vechi prieten.

ADAOS

Principiul lui Gilbreath și folosirea lui în trucul descris a fost explicat pentru prima dată de Norman Gilbreath într-un articol intitulat Culoari magnetice și publicat în revista de magie „The Linking Ring”, voi. 38, nr. 5, p. 60, iulie 1958. De atunci au mai apărut zeci de trucuri inteligente cu cărți bazate pe același principiu. Pentru cei care-și pot face rost de colecțiile revistelor de magie, iată cîteva referințe:

34

„Linking Ring”, voi. 38, nr. 11, pp. 54—58, ianuarie 1958 (Charles Hudson, Ed. Marlo).

„Einking Ring”, voi. 39, nr. 3, pp. 65—71, mai 1959 (Charles Hudson, George Eord, Ron Edwards).

„Ibidem” (O revistă de magie canadiană), nr. 16, martie 1959 (Tom Ransom).

„Ibidem”, nr. 26, septembrie 1962 (Tom Ransom).

„Ibidem”, nr. 31, decembrie 1965 (Allan Slaightj).

Principiul poate fi demonstrat într-un mod mai puțin riguros, după cum urmează. Atunci cînd pachetul de cărți este tăiat în vederea amestecării convenționale, apar două situații posibile: cele două cărți de la fundul celor două jumătăți sînt fie de aceeași culoare, fie de culori diferite. Să presupunem că sînt diferite. După ce prima carte cade, cărțile de la fundul celor două jumătăți vor fi de aceeași culoare, diferită de culoarea cărții căzute. Prin urmare, nu are importanță pentru cartea următoare dacă trece peste degetul mare de la mîna stînga sau de la

mîna dreaptă; în ambele cazuri, peste cartea deja căzută va cădea o carte de culoare opusă. Aceasta face ca pe masă să stea acum o pereche de cărți ale căror culori nu se potrivesc. Situația este acum exact aceeași ca înainte. Cărțile de la fundul celor două jumătăți din mîna nu se potrivesc. Indiferent care carte cade, cărțile care rămîn la fund vor avea amîndouă aceeași culoare. Și așa mai departe. Argumentația se repetă pentru fiecare pereche, pînă cînd pachetul se termină.

Să presupunem acum că pachetul este tăiat la început în așa fel ca la fundul celor două jumătăți să se afle cărți de aceeași culoare. Oricare carte poate cădea prima. Argumentația de mai înainte se poate aplica acum tuturor perechilor următoare de cărți. Ultima carte care rămîne trebuie să fie, evident, de culoare diferită cu a primei cărți căzute. Atunci cînd pachetul este tăiat între două cărți de aceeași culoare (adică între perechile ordonate), cărțile care se află la baza și la partea de sus a pachetului sînt aduse împreună, așa că perechile sînt intacte. Există multe modalități de prezentare a trucului cu cărțile și paharul. Ron Edwards, din Rochester (New York), mi-a comunicat că el lucrează cu nouă cărți alese la întîmplare și așezate în careu. Spectatorul așază o tîgvă miniaturală pe una din cărți. Tigva este prevăzută cu o gaură, în care Edwards pune o foaie de hîrtie răsucită, pe care și-a scris prezicerea — numele cărții din centru. Foaia cu instrucțiunile potrivite este scoasă din buzunar (Edwards avînd grijă să păstreze cele două foi în buzunare diferite.) Aceste instrucțiuni indică de preferință pozițiile (și numele) cărților care trebuie date deoparte.

35

După ce jocul a fost publicat în „Scientific American”, Hal Newton din Rochester, a elaborat o versiune numită „0 voce de dincolo de mormînt”, în care instrucțiunile sînt date de un disc de patefon, iar spectatorul mută un obiect înainte și înapoi pe nouă cărți care poartă nume de planete. Evident, discul poate fi pus pe ambele fețe. Jocul a fost pus pe piață în 1962 de Gene Gordon, proprietarul unui magazin de magie din Buffalo.

£ ■y'-'lăKmfT'"

RĂSPUNSURI

Fraza de pe cărțile amestecate suna, la început, după cum urmează: THE SMEELING ORGANS OF FISH HAVE EVOEVED IN A GREAT VARIETY OF FORMS (Organele de miros ale peștilor au evoluat spre o bogată varietate de forme). Este prima frază a ultimului paragraf (la p. 73) din articolul Somonul călător, de Arthur D. Hasler și James A. Earsen, publicat în „Scientific American” din august 1955.

CAPITOLUL X

Teorema hărții în pafru culori

Dintre toate marile speculații nedemonstrate ale matematicii, cea mai simplă — simplă în sensul că poate fi înțeleasă pînă și de un copil — este celebra teoremă topologică a celor patru culori. Cîte culori sînt necesare pentru a colora o hartă, astfel ca țările care au o frontieră comună să nu fie de aceeași culoare? Este foarte ușor să desenăm hărți care necesită patru culori; pe de altă parte, doar cunoștințe de matematică elementară sînt necesare pentru a demonstra riguros că cinci culori sînt suficiente. Dar sînt oare cele patru culori nu numai necesare, ci și suficiente? Sau, altfel spus, este oare posibil să construim o hartă care să necesite cinci culori? Matematicienii preocupați de această problemă cred că nu, dar nu sînt de loc siguri.

Cam la fiecare cîteva luni găsesc printre scrisorile care îmi vin o „demonstrație” lungă a teoremei celor patru culori. Dar în aproape fiecare caz se vedește pînă la urmă că trimitătorul a confundat teorema cu alta, mult mai simplă, care afirmă că este imposibil să fie desenată o hartă a unui grup de cinci țări, astfel ca fiecare țară să fie vecină cu celelalte patru. (Două țări, care sînt vecine doar într-un punct nu sînt considerate vecine.) Eu însumi am contribuit un pic la această confuzie, scriind mai de mult o nuvelă științifico-fantastică intitulată Insula celor cinci culori, despre o insulă imaginară care a fost împărțită de un topolog polonez în cinci regiuni care aveau, toate, frontiere comune. Nu este prea greu să demonstrăm că o hartă de felul acesta nu poate fi desenată. S-ar putea presupune că teorema celor patru culori pentru ori ce hartă decurge acum de la sine — dar nu este așa.

35

Fig. 43 Atunci cînd se desenează o hartă în patru culori, deseori este nevoie să se șteargă culorile deja puse și să se pună altele.

Pentru a vedea de ce este așa, să considerăm harta simplă desenată în fig. 43 a. (Forma reală a regiunilor nu are importanță; numai felul în care ele sînt legate este semnificativ. Teorema celor patru culori este o teoremă topologică tocmai pentru că are ca obiect o proprietate a figurilor plane care rămîne nemodificată de deformarea suprafeței pe care sînt așezate.) Ce culoare vom folosi pentru regiunea rămasă necolorată? Este evident că va trebui să o colorăm fie cu roșu, fie cu o a patra culoare. Să presupunem că alegem cea de-a doua variantă și o colorăm verde, așa cum se vede în fig. 43 b. Apoi adăugăm o altă regiune. Acum este imposibil să completăm harta fără a utiliza o a cincea culoare. Să ne întoarcem așadar la fig. 43 a, unde, în loc de verde, să punem roșu. Dar asta produce încurcături dacă alte două regiuni suplimentare ating pe primele patru, după cum se arată în fig. 43 c. Este clar că sînt necesare o a patra și o a cincea culoare pentru cele două arii albe. Dar demonstrează oare aceasta că pentru anumite hărți sînt necesare cinci culori? Desigur că nu. În ambele cazuri ne-am putea descurca cu patru culori — dar numai întorcîndu-ne înapoi și modificînd schema precedentă de colorare. Atunci cînd avem de colorat hărți complicate, cu zeci de regiuni, putem ajunge deseori la încurcături de felul acesta, care necesită întoarceri înapoi. Prin urmare, pentru a demonstra teorema celor patru culori trebuie să

arătăm că astfel de modificări pot fi întotdeauna făcute cu succes, sau să inventăm un procedeu care să elimine toate aceste modificări în cursul colorării cu patru culori a oricărei hărți. Stephen Barr a sugerat un minunat joc topologic pentru două persoane, bazat pe greutatea de a prevedea aceste încurcături de

36

culoare. Jucătorul A desenează o regiune. Jucătorul B o colorează și adaugă o nouă regiune. Jucătorul A o colorează și adaugă o a treia. Jocul continuă, fiecare jucător colorînd ultima regiune desenată de oponent, pînă cînd unul dintre ei pierde, atunci cînd este forțat să folosească o a cincea culoare. Nu cunosc o altă cale mai rapidă de a lua cunoștință cu greutatea care intervin în demonstrarea teoremei celor patru culori, decît angajarea în acest joc curios.

Deseori se spune că cei dintîi care și-au dat seama că pentru nici o hartă nu este nevoie de mai mult de patru culori au fost cartografii, dar faptul a fost pus la îndoială de Kenneth O. May, un matematician de la Colegiul Carleton (din Northfield, statul Minnesota). Deși a cercetat îndelung originile teoremei celor patru culori, May nu a putut găsi nici un fel de formulare a teoremei în vechile cărți de cartografie, sau măcar vreo indicație că ea era cunoscută. Se pare că teorema a fost formulată clar pentru prima dată de Francis Guthrie, un student la Edinburgh. El a vorbit despre ea cu fratele său Frederick (care mai tîrziu a devenit chimist), iar acesta, la rîndul său, a trecut-o profesorului său de matematici, Augustus de Morgan (în 1852). Teorema a devenit larg cunoscută după ce marele Arthur Cayley a admis, în 1878, că a lucrat o vreme asupra ei, dar că nu a fost în stare să o demonstreze.

În 1879, avocatul și matematicianul englez Sir Alfred Kempe a publicat ceea ce el credea că este o demonstrație, iar un an mai tîrziu, a scris pentru revista „Natura” un articol cu un titlu foarte sigur și încrezător, Cum să colorăm o hartă cu numai patru culori. Timp de zece ani, matematicienii au fost convinși că problema a fost rezolvată. Dar apoi P. J. Heawood a dibuit o eroare fatală care se strecurase în demonstrația lui Kempe. De atunci încoace, mai toate mințile iscusite ale matematicii au încercat, fără succes, să rezolve problema. Ceea ce induce în eroare la teoremă este că ea pare foarte ușor de demonstrat. În cartea sa autobiografică Ex-Prodigy (Un om obișnuit), Norbert Wiener¹ scrie că și el a încercat, ca toți matematicienii, să găsească o demonstrație a teoremei, doar pentru ca în cele din urmă să constate că din toată demonstrația nu rămîn decît fărîme, la fel ca din „aurul nebunului”², cum se exprimă el. Ceea ce este pe deplin stabilit în momentul de față este faptul că teorema este valabilă pentru hărți cu nu mai mult de 38 de regiuni. Acesta poate părea un număr foarte mic, dar el devine mai puțin banal dacă ne gîndim că numărul hărților topologic-diferite cu nu mai mult de 38 de regiuni

•Matematician american, 1874 — 1964. — N.T.

2 „Aurul nebunului” — nume dat piritelor feroase sau cuprifere, care pot fi ușor confundate cu aurul. — N.T.

36

care pot fi desenate se ridică la valoarea astronomică de 10^{38} . Nici măcar un calculator electronic modern nu ar fi în stare să examineze toate aceste configurații într-un timp rezonabil de scurt.

Lipsa unei demonstrații pentru teorema celor patru culori este cu atît mai exasperantă, cu cît pentru suprafețe cu mult mai complicate decît planul demonstrația a fost dată. (Din punctul de vedere al problemei de față, suprafața unei sfere este identică cu un plan; orice hartă desenată pe o sferă poate fi transformată într-o hartă plană echivalentă prin tăierea ei în una dintre regiuni și aplatizarea suprafeței.) S-a demonstrat că pe suprafețe cu o singură față, cum sînt banda Moebius, sticla lui Klein³ sau planul proiectiv, șase culori sînt necesare și suficiente. Pe suprafața unui tor, numărul este șapte. O astfel de hartă este desenată în fig. 44. Se observă că fiecare regiune este mărginită de șase segmente de dreaptă și că este vecină cu celelalte șase regiuni. În fapt, problema colorării hărții a fost definitiv rezolvată pentru orice suprafață de ordin mai înalt care a fost studiată serios.

Abia cînd se încearcă aplicarea teoremei la suprafețe topologic-echivalente cu planul sau cu suprafața sferei, demonstrația ridică dintr-o dată probleme serioase pentru topologi. Și, ceea ce este și mai trist, nu există vreo rațiune vizibilă de ce lucrurile se întîmplă așa. Există ceva în felul apariției unor stafii în toate încercările de demonstrație care par să meargă strălucit, pentru ca un pic mai tîrziu să trădeze vreo iritantă scăpare oarecare care distruge tot lanțul logic impecabil tocmai înainte de a i se adăuga ultima verigă. Nimeni nu poate prezice ce va decide viitorul asupra acestei probleme, dar de pe acum putem spune că o faimă mondială așteaptă pe primul om care va obține una dintre următoarele trei realizări:

1. O hartă care să necesite cinci culori. „Dacă aș fi destul de curajos să fac o presupunere — scrie H. S. M. Coxeter în excelentul său articol Problema hărții în patru culori, 1840—1890 — atunci aș presupune că o hartă care să necesite cinci culori poate fi posibilă, dar că cea mai simplă dintre toate aceste hărți are atîtea fețe (poate sute, sau chiar mii), încît nimeni nu va avea răbdarea să facă toate verificările trebuincioase pentru excluderea posibilităților de a o colora cu numai patru culori”.

2. O demonstrație a teoremei — recurgînd, eventual, la vreo teh-

3 Sticla lui Klein — figură geometrică cu o singură față, constînd dintr-un tub ascuțit spre unul dintre capete, al cărui capăt mai subțire este îndoit înapoi, introdus printr-o margine a tubului și unit prîn încălzire cu capătul larg, permițînd astfel ca două puncte oarecare ale figurii să fie unite printr-o linie neîntreruptă. Numită astfel după matematicianul german Felix Klein, 1849—1925. — N.T.

Fig. 44 Cu șapte culori se poate desena o hartă pe un tor (c). Foaia (a) este mai întâi înfășurată într-un cilindru (b). Torul rezultat este mult mărit (c).

nică nouă; această tehnică nouă, nu mai este nevoie să o spunem, ar putea deschide brusc multe alte uși închise ale matematicii.

3. O demonstrație a faptului că teorema este imposibil de demonstrat. Asta poate suna ciudat, dar în 1931 Kurt Gödel⁴ a stabilit că în orice sistem deductiv destul de complicat pentru a include raționamente aritmetice, există teoreme matematice care pot fi „nerezolvabile”⁵ în cadrul sistemului. Deocamdată, foarte puține dintre marile probleme în suspensie ale matematicii s-au dovedit „nerezolvabile” în acest sens. Este oare teorema celor patru culori o astfel de problemă? Dacă Da, ea poate fi acceptată ca „adevărată” numai incluzând-o ca un postulat nou și nedemonstrabil al unui sistem deductiv mai larg. ; |

Din păcate, demonstrația faptului că cinci culori sînt suficiente pentru hărțile plane, sau că șase sau mai multe culori sînt necesare și suficiente pentru hărți desenate pe anumite suprafețe de ordin mai înalt, este prea lungă pentru a fi inclusă aici. Dar poate că următoarea demonstrație isteată a unei teoreme pentru două culori va da cititorului o oarecare idee despre cum trebuie procedat ca să stabilești o teoremă relativă la colorarea hărților. Să considerăm toate hărțile plane posibile care pot fi formate prin linii drepte. Un exemplu ar fi tabla de șah obișnuită. Un tipar mai puțin regulat este ilustrat în partea stînga a fig. 45. Sînt oare două culori suficiente pentru astfel de hărți? Răspunsul este Da, iar demon-

Fig. 45 Două culori sînt suficiente pentru orice hartă desenată în linii drepte care se întretaie pe întreaga suprafață.

4 Matematician și logician american de origine cehoslovacă, născut în 1906. — A*. T. 6 în sensul că nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate. — N.R.

strația este foarte ușoară. Dacă adăugăm o linie dreaptă suplimentară (de exemplu, linia groasă din același desen) oricărei hărți din linii drepte corect colorate, această linie va diviza planul în două hărți separate, fiecare colorată corect dacă este considerată izolat, dar cu perechi de regiuni colorate identic de-a lungul liniei groase. Pentru a restaura colorarea corectă pentru întreaga hartă, tot ce avem de făcut este să interschimbăm toate culorile de o parte a liniei (indiferent care). Această operație este ilustrată în partea dreaptă a figurii. Harta din partea de sus a figurii a fost inversată, așa cum o fotografie pozitivă este schimbată în una negativă. După cum se vede, noua hartă este acum corect colorată.

Pentru a completa demonstrația, să considerăm un plan care este împărțit în două regiuni printr-o singură linie. Evident, cele două regiuni pot fi colorate cu două culori. Desenăm o nouă dreaptă și inversăm culorile de o parte a acestei linii. Desenăm o a treia linie și așa mai departe. Este clar că procedeul rămîne valabil pentru orice număr de drepte — așa că putem considera demonstrată teorema celor două culori pentru orice hartă desenată cu linii drepte, printr-o

Fig. 46 Două culori sînt, de asemenea, suficiente pentru o hartă desenată cu linii care se întretaie pe suprafață și cu curbe închise.

metodă cunoscută sub numele de „metoda inducției matematice”. Demonstrația poate fi generalizată pentru cazul unor hărți mai puțin rigide, ca cea din fig. 46, desenate cu linii fără sfîrșit care fie că traversează harta de la un capăt la altul, fie că sînt cuprinse în întregime în interiorul ei, ca linii curbe închise. Dacă adăugăm o linie care trece de la o margine la alta a hărții, putem inversa culorile de o parte a acestei linii, ca și înainte. Dacă noua linie este o curbă închisă, putem inversa culorile tuturor regiunilor din interiorul — sau, dacă preferăm, din exteriorul acestei bucle. Aceste linii închise se pot intersecta cu ele însele, dar în acest caz operația de recolorare devine ceva mai complicată.

De notat că toate hărțile date ca exemplu aici au încrucișări pare (la fiecare încrucișare se întîlnesc un număr par de linii). Se poate demonstra că o hartă plană poate fi colorată în două culori dacă și numai dacă toate încrucișările sale sînt pare. Faptul este cunoscut sub numele de „teorema hărților în două culori”. Că această condiție nu este suficientă pentru hărțile desenate pe un tor se poate vedea ușor liniind nouă pătrate pe o foaie de hîrtie pătrată (ca pentru jocul Ticktacktoe⁶), și apoi îndoind-o în formă de tor în modul descris mai înainte. Acest covrig cu pătrățele are încrucișări pare, dar necesită

trei culori.

zn
j
j
5H
C

Fig. 47 Cîte culori sînt necesare pentru această hartă?

Și acum, iată trei probleme de colorare a hărților, foarte ușoare, deși fiecare dintre ele prezintă capcane de un fel sau altul, care fac soluția oarecum diferită de cea care ar fi de așteptat la prima vedere; ele sînt date aici mai mult pentru amuzament decît ca instruire.

1. Cîte culori cere harta din fig. 47 (inventată de problemistul englez Henry Ernest Dudeney), astfel încît două regiuni vecine să nu fie colorate în aceeași culoare ?

2. Stephen Barr scrie

6 Vezi nota 1 de la cap. VI. — N.T.

38

despre un pictor care dorea să picteze pe o pînză enormă un desen non-figurativ după modelul din fig. 48. El s-a hotărît să se limiteze la patru culori și să umple fiecare regiune cu o culoare, astfel încît pe fiecare parte a fiecărei frontiere comune să fie cîte o culoare diferită. Fiecare regiune are o arie de 8 dm², în afară de regiunea de sus, care este de două ori mai mare. Cînd pictorul și-a verificat stocul de culori, a găsit că are la îndemînă doar atîta roșu cît să-i ajungă pentru o suprafață de 24 dm², atît galben cît să-i ajungă pentru o suprafață egală cu aceasta, atît verde cît să-i ajungă pentru 16 dm² și atît albastru cît să-i ajungă să acopere 8 dm². Cum a reușit pînă la urmă să vopsească toată pînza ?

3. Eeo Moser, un matematician de la Universitatea din Alberta (Canada), întrebă : cum poate fi desenată pe un plan o hartă în două culori, astfel încît indiferent unde ar fi plasat pe ea un triunghi echilateral cu latura egală cu 1, cele trei vîrfuri ale sale să nu fie niciodată situate toate pe una și aceeași culoare ?

Fig. 48 Cîte culori sînt necesare pentru colorarea acestui tablou abstracționist ?

ADAOS

Afirmația că pe un plan nu pot fi desenate cinci regiuni astfel ca fiecare pereche să aibă o frontieră comună a fost făcută de Moebius, într-o lecție a sa din 1840. El a prezentat-o sub forma unei istorioare, în care un prinț oriental își lasă moștenire regatul celor cinci fii ai săi, cu condiția ca el să fie împărțit în cinci regiuni, fiecare dintre ele vecină cu celelalte. Problema este echivalentă cu următoarea problemă din teoria grafelor⁷: este oare posibil să plasăm cinci puncte într-un plan și să unim fiecare punct cu toate celelalte prin linii drepte care nu se intersectează? Demonstrații ale imposibilității acestui lucru nu sînt grele și pot fi găsite în orice carte elementară de teoria grafelor. O variantă ușor de urmărit a fost dată

' Graf — o serie de puncte, discrete sau continue, ca cele care formează o curbă sau o suprafață, fiecare dintre ele reprezentînd valoarea unei anumite funcții. — N.T.

38

de Heinrich Tietze în capitolul intitulat Asupra domeniilor vecine din cartea sa Famous Problems of Mathematics (Probleme matematice celebre). În linii generale, o demonstrație asemănătoare a fost dată și de Henry Dudeney ca soluție la problema nr. 140 din Mathematical Puzzles (Enigme matematice). Din păcate, Dudeney afirmă că demonstrația lui ar cuprinde, implicit, și o demonstrație a teoremei celor patru culori. Limbajul neriguros pe care l-am folosit cînd am spus că teorema celor patru culori este „nerezolvabilă în sens Godel” a atras următoarea scrisoare de la cosmologul englez Dennis Sciama (publicată în „Scien-tific American”, noiembrie 1960, p. 21) :

„Mi-a plăcut articolul lui Martin Gardner despre problema celor patru culori. Într-adevăr, este imposibil de demonstrat că este imposibil să se demonstreze teorema. Pentru că dacă teorema nu este adevărată, lucrul acesta poate fi probat explicit și fără puțință de îndoială prezentînd o hartă care nu a putut fi colorată cu patru culori. Prin urmare, dacă teorema este nedemonstrabilă, ea trebuie să fie adevărată. Aceasta înseamnă că nu putem demonstra că ea este nedemonstrabilă, căci aceasta ar fi echivalent cu a demonstra că teorema este adevărată — ceea ce este o contradicție.

Același raționament rămîne valabil pentru oricare teoremă a cărei falsitate ar putea fi demonstrată printr-un contraexemplu, de exemplu ultima teoremă a lui Fermat⁸. S-ar putea ca astfel de teoreme să fie nedemonstrabile — dar aceasta numai dacă ele sînt adevărate. Prin urmare, nu vom putea niciodată ști că ele sînt nedemonstrabile, așa că matematicienii vor încerca la infinit să le demonstreze. Este o stare de lucruri de-a dreptul înfricoșătoare. Poate că ar fi mai convenabil să ne apucăm cu toții să facem fizică, dar s-ar putea ca și acest domeniu să fie în cele din urmă invadat de Godel-iști...”

De fapt, situația nu mai pare chiar atît de înfricoșătoare dacă ne gîndim că o teoremă care este nerezolvabilă în sens Godel în cadrul unui anumit sistem deductiv poate fi întotdeauna rezolvată metama-tematic, lărgind sistemul. Dacă teorema celor patru culori se va dovedi vreodată nerezolvabilă în sens Godel, în cadrul unui sistem bazat pe anumite postulate ale topologiei și ale teoriei mulțimilor, ea va deveni automat „adevărată” (după cum arată clar Sciama) — dar „adevărată” în sensul metamatematic că este rezolvabilă într-un sistem mai larg, poate un sistem în care teorema hărții în patru culori este un nou postulat.

⁸ Pierre de Fermat — matematician francez, 1601 — 1665. „Ultima teoremă a lui Fermat” este numele dat unei teoreme nedemonstrate, care afirmă că ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții pentru x, y și z întregi nenuli, atunci cînd n este mai mare decît 2. — N. T.

38

RĂSPUNSURI

Iată răspunsurile la cele trei probleme de colorare a hărților (48)imele d°Uâ răspUnsuri trimit la desenele din fig. 47 și, respectiv,

1. Harta din fig. 47 ar putea fi colorată în două culori — dacă n-ar exista o mică linie în colțul din stînga jos. În

zona aceea există trei regiuni adiacente, așa că sînt necesare trei culori.

2. Artistul și-a colorat tabloul abstracționist, amestecînd întreaga cantitate de culoare albastră pe care o avea la dispoziție, cu o treime din cantitatea de culoare roșie, obținînd astfel suficient purpuriu ca să coloreze 16 dm² din pînză. După ce a colorat cu galben partea mare de sus și aria din centru, i-a fost ușor să coloreze regiunile rămase în roșu, verde și purpuriu.

3. Pentru a colora un plan în două culori în așa fel încît nici un grup de trei puncte de aceeași culoare să nu poată fi vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura 1, metoda cea mai simplă este să se împartă planul în benzi paralele, fiecare cu lățimea de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, și acestea să fie apoi colorate alternativ în alb și negru, așa cum se vede în fig. 49. Totuși, aceasta nu rezolvă problema decît dacă introducem noțiunile de mulțimi închise și mulțimi deschise. Un continuu de numere reale — să spunem, numerele 0 și 1 — se numește interval închis dacă include numerele 0 și 1, și deschis dacă nu le include. Dacă unul dintre aceste numere este inclus, iar celălalt nu, intervalul este numit închis la un capăt și deschis la celălalt.

Banțele desenate pe plan sînt închise de-a lungul marginii lor din stînga și deschise de-a lungul celei din dreapta. Banda neagră din stînga are o lățime care începe la 0, măsurată pe dreapta orizontală din partea de jos a figurii, și se termină la $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ea include pe 0, dar nu include valoarea $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Banda următoare are o lățime care include pe $\frac{\sqrt{3}}{2}$, dar nu include valoarea $\sqrt{3}$ și așa mai departe pentru celelalte benzi. Cu alte cuvinte, fiecare linie verticală aparține numai de banda din dreapta sa. Această condiție este necesară pentru cazurile în care triunghiul, desenat în linii punctate, este așezat cu toate cele trei vîrfuri pe liniile de frontieră.

Leo Moser, de la Universitatea din Alberta, care mi-a trimis această problemă, scrie că nu se știe de cîte culori este nevoie pentru a colora planul, în așa fel încît oricare două puncte, separate printr-o distanță egală cu 1, să nu fie situate pe o aceeași culoare. S-a arătat că numărul necesar de culori este patru și că numărul suficient este șapte. (Faptul că șapte este un număr suficient reiese clar dacă ne gîndim la o rețea regulată de hexagoane, fiecare cu raza cercului circumscris ceva mai

39

O

vT 2

CV3

2 ~ 2 2 "2

1-ig. 49 Soluția problemei triunghiului și a hărții în două culori.

VT

mică decît 1 și înconjurat de șase hexagoane de culori diferite atît între ele cît și față de cea a hexagonului central.) Distanța de la patru la șapte este atît de mare, încît problema pare încă foarte departe de rezolvare.

CAPITOLUL XI

DI. Apollinax vizitează New York-ul

Pe cînd domnul Apollinax vizita New York-ul, Risul lui provoca clinchetul ceștilor de ceai. T. 6. EHot P. Bertrand Apollinax, strălucitul protejat al celebrului matematician francez Nicolas Bourbaki, era puțin cunoscut chiar și în Franța înainte de primăvara lui 1960. Dar în acel an, după cum se știe, lumea matematică a fost zguduită de publicarea într-o revistă franceză a unei descoperiri, cunoscută astăzi sub numele de funcția lui Apollinax. Cu ajutorul acestei remarcabile funcții, Apollinax a putut dintr-o singură lovitură: a) să demonstreze ultima teoremă a lui Fermat, b) să găsească un contraexemplu (și anume o hartă cu 5693 regiuni) la faimoasa teoremă topologică a celor patru culori și c) să așeze temeliile descoperirii de către Channing Cheetah, trei luni mai tîrziu, a unui număr cu 5693 cifre — primul în genul său — care este atît perfect, cît și impar.

Cițitorul va înțelege desigur surpriza mea plăcută cînd profesorul Cheetah, de la Universitatea din New York, m-a invitat la o serată la care Apollinax urma să fie oaspetele de onoare. (Apartamentul lui Cheetah se află situat în Greenwich Village, într-o casă mare de piatră cafenie aproape de Fifth Avenue. Proprietara clădirii este d-na Orville Phlaccus, văduva cunoscutului om de afaceri, iar clădirea însăși este supranumită Palatul Phlaccus de către studenții Universității new-yorkeze din apropiere.) Cînd am ajuns eu, serata era în toi. Am recunoscut printre invitați cîțiva membri ai Facultății de matematică a Universității și am bănuțit că cei mai mulți dintre tinerii prezenți erau studenți.

Nu se putea să te înșeli în privința lui Apollinax. El era, bineînțeles,

39

în centrul atenției. Un tînăr licențiat trecut cu puțin de 30 de ani, înalt, cu trăsături aspre, care nu puteau fi numite frumoase, dar care sugerau o puternică impresie de bărbăție, combinată cu o inteligență masivă. Purta un mic barbișon negru și avea urechile cam mari. Sub haina de tweed purta o vestă de un roșu aprins.

În timp ce d-na Phlaccus îmi întindea o ceașcă de ceai, auzii o fată spunînd:

— Spune-mi, domnule Apollinax, inelul de argint de la degetul dv. nu e cumva o bandă Moebius?

DI. Apollinax își scoase inelul și i-l dădu.

— Ba da, spuse el. E făcut de un prieten al meu din Paris, care ține un magazin de bijuterii pe Malul Sfîng.

Vorbea cu un pronunțat accent franțuzesc.

— Dar e o nebulie! exclamă fata, înapoiindu-i inelul. Nu vă e teamă că s-ar putea răsuci, făcînd să vă dispară

degetul ?

Apollinax rîse zgomotos.

— Dacă crezi cu adevărat că asta este nebunie, atunci nu știu ce vei spune despre asta. Și scoase din buzunar o cutiuță plată și pătrată de lemn. Înăuntru erau 16 plăcuțe din material plastic alb, care se potriveau perfect una în alta, așa cum se vede în partea din stînga a fig. 50. Grosimea lor fusese astfel aleasă, încît cele cinci piese din centru aveau formă de cub. Apollinax atrase atenția asupra numărului de cuburi, împrăștie plăcuțele pe o masă din apropiere, apoi le reasează iute în cutiuță, în modul arătat în ilustrația din dreapta. Ele se potriveau și de data asta la fel de perfect ca înainte. Dar acum erau numai patru cuburi! Unul dintre cuburi dispăruse complet!

Fig. 50 Misterul plăcuței care dispare.

.Fata p[^]ivi cutiuța cu neîncredere un timp, apoi își întoarse privirea mirată către Apollinax, care se zguduia de rîs.

. — Aș putea să mă uit puțin la ea? întrebă ea, luîndu-i cutiuța din mîna și ducînd-o spre un colț mai liniștit al camerei.

— Cine este puiculița? șopti Apollinax la urechea profesorului Cheetah.

— Pardon? răspunse profesorul.

— Fata cu bluza aceea drăguță, vreau să spun.

— A da, o cheamă Nancy Ellicott. Vine de la Boston. Este una dintre cele mai bune studente ale noastre.

— Foarte frumoasă.

— Adevărat ? N-am văzut-o niciodată purtînd altceva decît blue-jeans și una și aceeași bluză, cam murdară.

— îmi plac grozav non-conformiștii pe care-i aveți aici, în Sat1. Se aseamănă atît de mult între ei!

— Uneori e însă greu să faci deosebire între non-conformism și nevroză, remarcă cineva din grup.

— Asta-mi amintește de o anecdotă pe care am auzit-o recent, intervenii și eu. Care este deosebirea dintre un psihopat și un nevropat ?

Nimeni nu scoase o vorbă.

— Un phisopat, continuai eu, crede că doi și cu doi fac cinci. Un nevropat știe că fac patru — dar asta îl enervează.

Se auziră cîteva rîsete politicoase, însă Apollinax părea foarte serios.

— Și are motive să fie nervos, spuse el. Nu scria oare Alexander Pope2: „De ce, o, zei! de ce doi și cu doi fac mereu patru ?” în adevăr, de ce? Nici chiar cea mai simplă aritmetică nu este ferită de contradicții.

Scoase din buzunar un carnețel și scrise pe el următoarea serie infinită :

$4-4 + 4- 4 + 4- 4 + 4...$ '

— Care este suma acestei serii ? întrebă el. Dacă grupăm numerele în felul următor:

$(4 - 4) + (4 - 4) + (4 - 4) ...$ suma este evident zero. Dar dacă le grupăm astfel: $4 - (4 - 4) - (4 - 4) - (4 - 4) ...$

1 Poet englez, 1688-1744. - N.T.

40

suma este, la fel de evident, patru. Să presupunem că mai încercăm și așa:

$4 - (4-4 + 4- 4 + 4- 4...)$

Suma seriei este acum patru minus suma aceleiași serii. Cu alte cuvinte, dublul sumei este patru, astfel că suma trebuie să fie egală cu jumătatea lui patru — adică doi!

Tocmai eram pe punctul să fac o observație, cînd Nancy se întoarse spre grup și spuse :

— Plăcuțele astea mă înnebunesc. Unde-o fi dispărut cel de-al cincilea cub ?

Apollinax rîse pînă îi dădură lacrimile.

— O să te ajut puțin, draga mea, spuse el. Gîndește-te : n-o fi dispărut cumva într-o dimensiune de ordin superior?

— Rîdeți de mine?

— De loc. Cum știi, cea de-a patra dimensiune este o prelungire de-a lungul unei a patra coordonate, perpendiculară pe cele trei coordonate ale spațiului tridimensional. Ia acum un cub. Acesta are patru diagonale principale, fiecare dintre ele pornind de la un colț și ajun-gînd la colțul opus prin centru. Din cauza simetriei cubului, fiecare dintre aceste diagonale este, în mod evident, perpendiculară pe celelalte. Și atunci, de ce n-ar putea un cub, dacă vrea cu adevărat, să alunece în lungul unei a patra coordonate ?

— Dar profesorul de fizică ne-a spus că cea de-a patra coordonată este timpul, spuse Nancy cu sprîncenele încruntate.

— Absurd! se indignă Apollinax. Relativitatea generalizată este acum la fel de moartă ca pterodactilii.

Profesorul acela n-a auzit că Hilbert Dongle a descoperit recent o eroare fatală în teoria lui Einstein ?

— Mă îndoiesc, răspunse Nancy.

— E foarte ușor să-ți explic. Dacă învîrtești foarte repede o sferă de cauciuc moale, ce se întîmplă cu ecuatorul ei ? Se umflă. În teoria relativității, poți explica această umflare în două feluri. Mai întîi, poți presupune că universul este un sistem de referință fix — un așa-numit sistem inerțial. În acest caz, spui că sfera se învîrtește, iar inerția produce umflarea ecuatorului. Sau, poți face din sferă un sistem de referință fix, în care caz trebuie să consideri că universul este cel care se rotește. Masele stelelor în mișcare stabilesc un câmp gravitațional

tensorial, care își exercită acțiunea cea mai puternică asupra ecuatorului sferei imobile. Bineînțeles...

— Eu aș pune problema un pic altfel, interveni Cheetah. Aș spune că există o mișcare relativă a sferei față de stele, iar această mișcare relativă produce o anumită schimbare în structura spațio-temporală

41

a universului. Cea care provoacă umflarea ecuatorului este tocmai presiunea, ca să spun așa, a acestei matrici spațio-temporale. Umflarea poate fi privită atît ca un efect gravitațional, cît și ca unul inerțial, în ambele cazuri ecuațiile cîmpului sînt aceleași.

— Foarte bine, zise Apollinax. Asta e tocmai ceea ce Einstein însuși numea principiul echivalenței — echivalența dintre gravitație și inerție. Așa cum îi plăcea lui Hans Reichenbach să o spună, între ele nu există nici o distincție autentică. Dar dă-mi voie să te întreb numai atît: nu este așa că teoria relativității interzice corpurilor fizice să aibă mișcări relative cu viteze mai mari decît cea a luminii ? Și totuși, dacă facem din mînea de cauciuc sistemul nostru fix de referință, n-ar fi nevoie decît de o foarte lentă rotație a mîngii pentru a da Lunii o mișcare relativă mult mai rapidă decît viteza luminii.

Cheetah îl privi cam încurcat.

— Înțelegi, continuă Apollinax, că nu putem ține sfera pur și simplu nemișcată, în timp ce învîrtim universul în jurul ei. Asta înseamnă că ar trebui să privim rotația sferei ca absolută, nu ca relativă. Astronomii au intrat într-o încurcătură de același tip cu ceea ce ei numesc efectul Doppler transversal³. Dacă Pămîntul se învîr-tește, viteza relativă transversală între observator și o rază de lumină care vine de la o stea îndepărtată este foarte mică, așa că deplasarea Doppler este foarte mică. Dar dacă consideri că universul se învîr-tește, viteza transversală a stelei îndepărtate față de observator este foarte mare, așa că efectul Doppler ar trebui să crească în mod corespunzător. Deoarece este însă bine stabilit că efectul Doppler transversal este mic, trebuie să admitem că Pămîntul este acel care se rotește. Bineînțeles, aceasta implică aruncarea pe fereastră a teoriei relativității.

— Bine, murmură Cheetah, care, în treacăt fie spus, arăta cam palid. Dar cum poți explica în acest caz faptul că experiența lui Michel-son și Morley nu a putut detecta vreo mișcare a Pămîntului față de spațiul fix?

— Foarte simplu, spuse Apollinax. Universul este infinit. Pămîntul se rotește în jurul Soarelui, Soarele aleargă prin galaxie, galaxia „galumfează”⁴ față de alte galaxii, galaxiile formează roiuri galactice care se mișcă față de alte roiuri galactice, iar roiurile acestea sînt părți ale unor supraroiuri. Ierarhia este fără de sfîrșit. Însumează o serie infinită de vectori, reprezentînd viteze și direcții întîmplătoare, și

³ Efectul Doppler — schimbarea aparentă a frecvenței unei unde (sonore sau luminoase), produsă de schimbări care au loc în distanța dintre sursa unde și receptor. Numit astfel după fizicianul austriac C. J. Doppler, 1803-1853. - N.T.

* în original, gallumph — cuvînt inventat de Lewis Carroll, prin combinarea cuvintelor gallop și triumphant. — N.T.

41

ai să vezi ce se întîmplă. Vectorii se anulează reciproc. Zeroul și infinitul sînt rude foarte apropiate. Dă-mi voie să-ți arăt.

Apollinax arătă cu degetul o vază mare care se afla pe masă.

— Închipuie-ți că vaza asta e goală. Apoi începem să o umplem cu numere; dacă vrei, cu mici plăcuțe pe care sînt înscrise numere. La douăsprezece fără un minut, punem înăuntru numerele de la 1 la 10, apoi scoatem afară numărul 1. La douăsprezece fără o jumătate de minut, introducem numerele de la 11 la 20 și îl scoatem pe 2. La douăsprezece fără o treime de minut, introducem numerele de la 21 la 30 și îl scoatem pe 3. La douăsprezece fără un sfert de minut, punem numerele 31—40 și îl scoatem pe 4. Și așa mai departe. Cîte numere vor fi în vază la douăsprezece fix?

— O infinitate, spuse Nancy. De fiecare dată cînd introduci în vază zece numere, iei afară numai unul.

Apollinax rîse în hohote.

— Ba nu va fi nici un număr în vază! Se află 4 în vază ? Nu, 4 a fost scos la operația a patra. Se află 518 în vază? Nu, acest număr a fost scos la operația a 518-a. Numerele care se vor afla în vază la douăsprezece fix formează o mulțime vidă. Te-ai convins cît de apropiat este infinitul de zero?

Doamna Cheetah tocmai se apropia de noi, cu o tavă pe care se găseau tot felul de prăjituri asortate.

— Cred că o să fie cazul să pun în aplicare axioma alegerii a lui Zermelo⁵, spuse Apollinax, și să iau cîte una din fiecare.

— Dacă ești așa de convins că teoria relativității poate fi considerată ca moartă, spusei eu după cîteva minute, care este atunci părerea dumitale despre teoria cuantică modernă? Există oare în comportarea particulelor elementare un caracter întîmplător fundamental? Sau caracterul întîmplător este doar o expresie a ignoranței noastre în înțelegerea legilor?

— În privința asta, sînt pe deplin de acord cu punctul de vedere modern, spuse Apollinax. De fapt, merg chiar și mai departe. Sînt de acord cu Karl Popper că există argumente logice cum că determinismul nu mai poate fi luat în serios.

— Asta n-o mai pot crede, spuse cineva.

— Bine, hai să o luăm altfel. Există porțiuni ale viitorului care principial nu pot fi niciodată prezise corect, chiar

dacă am dispune de informații complete despre starea universului. Dă-mi voie să demonstrez.

8 Axioma lui Zermelo sau axioma alegerii — axiomă din teoria mulțimilor, care afirmă că, dată fiind o colecție oarecare de mulțimi separate, poate fi construită o mulțime nouă care să conțină câte un element din fiecare mulțime dată. — N.T.

42

Scoase o fișă de carton din buzunar și ținînd-o în așa fel ca nimeni să nu poată vedea ce scrie pe ea, mîzgăli câteva vorbe. Apoi îmi întinse fișa.

— Pune-o, te rog, în buzunarul din dreapta al pantalonilor. Făcui cum mi-a spus.

— Pe fișă, spuse el, am descris un eveniment viitor. Evenimentul nu a avut încă loc, dar în mod sigur el va avea sau nu va avea loc înainte de — privi la ceasul de la mîină — înainte de ora nouă.

Scoase din buzunar o altă fișă și mi-o întinse.

— Aș vrea să încerci să ghicești dacă evenimentul pe care tocmai l-am descris va avea loc sau nu. Scrie pe fișă Da sau Nu.

Tocmai pusesem mîna pe creion, cînd Apollinax mă apucă de încheietura mîinii.

— Nu încă, prietene. Dacă aflu care-ți este prezicerea, aș putea face ceva ca să nu fie așa cum spui. Așteaptă să mă întorc cu spatele și ai grijă ca nimeni să nu vadă ce scrii.

Se răsuci cu spatele la mine și privi în tavan pînă terminai de scris.

— Acum pune fișa an buzunarul din stînga, te rog. Se întoarse din nou' cu fața.

— Nu știu, bineînțeles, care-ți este prezicerea. Nici dumneata nu știi care este evenimentul. Așadar, șansa ca să ai dreptate este de unu la doi.

Încuviințai.

— În acest caz, pot pune cu dumneata următorul rămășag. Dacă prezicerea dumitale se dovedește falsă, îmi dai un dolar. Dacă se dovedește justă, îți dau eu un milion de dolari.

Toată asistența privea uimită.

— S-a făcut, spusei.

— În timp ce așteptăm să se facă ora nouă, spuse Apollinax către Nancy, să ne întoarcem un pic la teoria relativității. Îți pot da o metodă de a purta întotdeauna o bluză relativ curată, chiar dacă nu ai decît două bluze și nu le speli niciodată.

— Sînt numai urechi, spuse Nancy, zîmbind.

— Ba mai ai și alte trăsături, spuse Apollinax, și încă foarte drăguțe toate. Dar lasă-mă să-ți explic metoda cu bluzele. Îmbracă mai înfii pe cea mai curată dintre ele, să zicem, bluza A, și poart-o pînă devine mai murdară decît bluza B. Apoi dezbrac-o și pune-ți bluza relativ curată B. În momentul cînd B a devenit mai murdară decît A, dezbrac-o și pune-ți bluza relativ curată A. Și așa mai departe.

Nancy se înroși toată.

— Mă tem că nu voi putea aștepta aici pînă la nouă, spuse Apollinax. Nu într-o seară călduroasă de primăvară ca asta, cel puțin. Nu cumva știi dacă Thelonus Monk cîntă pe undeva prin oraș în seara asta ?

42

Nancy făcu ochii mari.

— Dar bineînțeles ! Cîntă într-un local chiar aici, în Sat. Îți place ?

— Mă omor după el, spuse Apollinax. Așa că dacă o să mă conduci la un restaurant bun prin apropiere, o să-ți ofer o masă, o să-ți explic misterul plăcuțelor și apoi o să mergem împreună să-l ascultăm pe Monk.

După ce Apollinax și Nancy plecară, braț la braț, zvonul despre prezicerea făcută se răspîndi printre toți invitații.

Cînd se făcu nouă, toți se strînsesă să afle care este prezicerea și care este răspunsul meu. Avusese dreptate.

Evenimentul prezis era logic neprevizibil. I-am rămas dator cu un dolar.

• Poate că cititorul va încerca el însuși să găsească evenimentul pe care Apollinax l-a descris pe fișa sa.

ADAOS

Mulți dintre cititorii l-au luat pe Apollinax foarte în serios (deși spusesem că el era protejatul lui Bourbaki, binecunoscutul matematician francez inexistent⁶) și mi-au cerut să le indic referința în care ar putea găsi mai multe amănunte despre „funcția lui Apollinax”. Așadar, precizez aici că atît Apollinax și Nancy, cît și ceilalți invitați, nu sînt altceva decît personaje din două poezii de Thomas Stearns Eliot⁷, Mr. Apollinax și Nancy, care apar una lîngă alta în volumul *Collected Poems: 1909—1962*, Faber and Faber, Eondra, 1963, pp. 32-33.

În treacăt fie spus, Mr. Apollinax este o poezie despre Bertrand Russell⁸. Atunci cînd Russell a vizitat Universitatea Harvard, în 1914, Eliot a audiat lecțiile acestuia de logică, iar mai apoi cei doi oameni s-au întîlnit la un ceai — tocmai ceaiul descris de Eliot în poezie.

Numele de Hilbert Dongle este derivat din cel al fizicianului englez Herbert Dingle, care de cîțiva ani

argumentează că dacă paradoxul ceasornicului din relativitate este adevărat, atunci teoria relativității este falsă.

(Vezi capitolul scris de mine asupra paradoxului ceasornicului în cartea *Relativity for the Million* (Relativitatea pe înțelesul

⁶ Nicolas Bourbaki este numele sub care sînt publicate, începînd din 1935, o serie de cărți din diferite domenii ale matematicii, scrise de matematicieni eminenți din diferite țări, în special din Franța. — N.T.

7 T. S. Eliot - poet și eseist englez, născut în Statele Unite (1888-1964), laureat al Premiului Nobel în 1948. - N.T.

8 Bertrand (Arthur William), conte de Russell, matematician și filozof englez (1872-1969), de două ori laureat al Premiului Nobel, în 1950 și 1968. - N.T.

43

tuturor), care se poate găsi acum într-o ediție de buzunar.) Iar Thelonius Monk nu este altcineva decât Thelonius Monk⁹.

Metoda pe care Apollinax o recomandă lui Nancy în legătură cu bluza relativ curată este împrumutată dintr-o poezioară a lui Piet Hem, pe care l-am mai menționat în capitolul asupra împletiturilor. Paradoxul cu numerele din vază provine din cartea lui J. E. Littlewood Varietăți matematice. El ilustrează cazul în care scăderea numărului transfiniț „alef-zero 10 din de zece ori alef-zero, dă zero Dacă plăcuțele numerotate sînt scoase din vază în ordinea 2 4 6 8 ., în vază rămîne o infinitate alef-zero de numere — și anume' toate numerele impare. S-ar putea, de asemenea, scoate din vază o mulțime infinită de plăcuțe într-un asemenea mod încît să rămînă orice număr finit dorit de plăcuțe. Dacă vrem, de exemplu, să lăsăm în vază exact trei plăcuțe, atunci scoatem numerele în ordine serială, dar începînd cu 4. Situația poate servi ca o ilustrație amuzantă a faptului că atunci cînd din alef-zero se scade alef-zero, rezultatul este nedeterminat; el poate fi făcut egal cu zero, cu infinit, sau cu orice pozitiv întreg dorit, în funcție de natura celor două mulțimi infinite care sînt implicate.

Modelul pentru paradoxul „cubului care dispare” este bazat pe un foarte puțin cunoscut principiu, descoperit de Paul Curry, din New York, și care este discutat pe larg în capitolele dedicate „disparițiilor geometrice” din cartea mea Mathematics, Magic and Mystery (Matematică, magie și mister), publicată la editura Dover în ediție de buzunar.

Prezentarea paradoxului prezicerii ca un rămășag a fost publicată pentru prima dată în revista canadiană de magie „Ibidem”, nr. 23, martie 1961, p. 23. O variantă ușor diferită, implicînd o carte poștală trimisă unui prieten, am publicat și în „The British Journal for the Philosophy of Science”, voi. 13, mai 1962, p. 51.

RĂSPUNSURI

Paradoxul plăcuțelor, demonstrat de P. Bertrand Apollinax, se explică după cum urmează. Cînd toate cele șaptesprezece plăcuțe sînt dispuse sub formă de pătrat, laturile pătratului nu sînt absolut drepte, ci sînt ușor convexe, aproape imperceptibil. Atunci cînd unul dintre cuburi este îndreptat și cele șaisprezece plăcuțe rămase

* Thelonius „Sphere” Monk, pianist și compozitor de jazz american, născut în 1918 (?). - N.T.

10 Alef-zero — numărul cardinal al tuturor întregilor pozitivi, cel mai mic număr cardinal infinit. „Alef” este prima literă a alfabetului ebraic. — N.T.

43

sînt rearanjate în pătrat, laturile acestui pătrat sînt concave în aceeași măsură imperceptibilă. Acest lucru explică schimbarea aparentă a ariei. Pentru a dramatiza paradoxul, Apollinax a fost nevoit să recurgă la iuțea de mînă, ascunzînd în mîncă cel de-al cincilea cub cu ocazia amestecării plăcuțelor pe masă.

Prezicerea făcută de Apollinax pe fișă era : „Vei introduce în buzunarul din stînga al pantalonilor o fișă pe care ai scris cuvîntul NU”. Cea mai simplă prezentare a aceluiași paradox este să ceri cuiva să prezică, prin DA sau NU, dacă următorul cuvînt pe care el îl va spune cu voce tare va fi NU. Argumentele care îl fac pe Karl R.

Popper să fie convins că o parte a viitorului este în principiu imprevizibilă, nu sînt bazate pe acest paradox — care nu este, de altfel, decît o variantă a vechiului paradox al minciunii — ci pe considerații cu mult mai profunde. Ele sînt expuse în articolul lui Popper Nedeter-minismul în fizica cuantică și în fizica clasică, publicat în „The British Journal for the Philosophy of Science”, voi. 1, nr. 2 și 3, 1950, și vor fi discutate mai pe larg în viitoarea sa carte Postscript: Afer Twenty Years (Postscriptum: După douăzeci de ani). Un paradox al prezicerii identic în esență cu cel al lui Apollinax, cu excepția faptului că în loc de o persoană și o fișă se folosește un calculator electronic și un ventilator electric, este discutat în capitolul 11 al cărții lui John G. Kemeny A Philosopher Looks at Science (Un filozof consideră știința), publicată la D. Van Nostrand în 1959.

Paradoxul seriilor infinite de cifre 4, alternativ adunate și scăzute, se explică prin faptul că suma acestei serii nu converge, ci oscilează între valorile zero și patru. Explicarea paradoxurilor rotației ar cere cunoștințe mai profunde de teoria relativității. Pentru o prezentare foarte atrăgătoare a unui punct de vedere modern asupra acestor dificultăți vechi, aș recomanda cartea lui Dennis Sciama The Unity of Universe (Unitatea universului), Doubleday and Comp., Inc., New York.

CAPITOLUL XII

Nouă probleme

1. JOCUL „EVITĂRII PĂTRATELOR”

Jocul folosește o tablă de șah de 6 X 6. Unul dintre jucători are 18 piese (rondele) roșii, iar celălalt 18 piese negre. Ei plasează alternativ cîte una dintre piesele lor pe oricare cîmp liber al tablei. Fiecare se străduie să evite așezarea pieselor astfel ca patru oarecare dintre ele să fie colțurile unui pătrat. Aceste pătrate pot fi de orice dimensiuni și pot fi înclinate oricum față de tablă. Există 105 astfel de pătrate, dintre care cîteva sînt indicate în fig. 51.

Un jucător este declarat învingător atunci cînd oponentul său nu mai reușește să evite formarea unuia dintre cele

105 pătrate. Se poate juca fie cu piese adevărate, fie cu creionul și hîrtia — desenînd tabla și marcînd cu X sau O cîmpurile pe care s-a jucat.

După ce am imaginat acest joc, luni de zile am fost convins că este imposibil ca el să ducă la remiză. Dar mai apoi C. M. McLaury, un student în matematică de la "Uni- p. CT gî patm dintre cde 1Qg ătfate versitatea din Oklahoma, a demon- 3pot fi formate pe tabla Sui strat ca jocul se poate, totuși, sîrși „evitării pătratelor”.

44

cu remiză. Problema constă în a arăta cum se poate ajunge la ea, și anume, în a împărți cele 36 de cîmpuri în două categorii, fiecare de cîte 18 cîmpuri, în așa fel încît patru cîmpuri oarecare din aceeași categorie nu constituie colțurile vreunui pătrat.

2. PROBLEMA ACARULUI

Dirijarea eficientă a trenurilor pune deseori probleme descurajante pentru dispeceri. Schema de circulație ilustrată în fig. 52 are meritul de a combina simplitatea cu o surprinzătoare dificultate.

Tunelul este suficient de larg pentru locomotivă, dar nu și pentru fiecare dintre cele două vagoane. Problema constă în a folosi locomotiva pentru a schimba între ele locurile celor două vagoane A și B, apoi în a aduce locomotiva la locul ei de la început. Pot fi folosite ambele capete ale locomotivei, pentru tras și împins, iar cele două vagoane pot fi legate, la nevoie, unul de celălalt.

Soluția optimă este cea care cere minimum de operații." Prin „operație” înțelegem aici orice mișcare a locomotivei între opriri, admișînd că ea se oprește atunci cînd își inversează direcția, cînd întîlnește un vagon pe care trebuie să-l împingă, sau cînd trebuie decuplată de un vagon pe care îl trăsese. Mișcările celor două macazuri nu sînt considerate ca operații.

Un mod foarte comod de a lucra la dezlegarea acestei enigme constă în a așeza trei monede diferite chiar pe ilustrație și în a le mișca de-a lungul liniilor, ținînd seama că numai moneda care reprezintă loco

A

Fig. 52 O problemă de dirijare a trenurilor.

motiva poate trece prin tunel. Pe figură, vagoanele au fost desenate în poziții prea apropiate de macazuri. Cînd lucrați la problemă, presupuneți că ambele vagoane sînt destul de îndepărtate de macazuri ca să lase destul loc pentru locomotivă și, eventual, pentru celălalt vagon.

Nu sînt permise manevre ale acelor în timpul mersului. De exemplu, nu este permis să schimbați repede macazul, imediat după ce locomotiva a împins un vagon necuplat peste el, în așa fel ca vagonul să treacă pe o linie, iar locomotiva pe cealaltă, fără să se oprească.

3. RECLAMELE DE BERE DE PE AUTOSTRADĂ

Smith conducea mașina pe o autostradă, cu soția lîngă el.

— Ai observat, spuse el la un moment dat, că reclamele astea idioate pentru berea Flatz par a fi egal distanțate pe șosea? Mă întreb la ce distanță sînt una de alta?

D-na Smith aruncă o privire la ceasul de la mîină, apoi socoti numărul de reclame pe lîngă care treceau într-un minut.

— Ce coincidență stranie! spuse Smith. Dacă înmulțești acest număr cu zece, rezultatul este exact egal cu viteza mașinii, în mile pe oră.

Presupunînd că viteza mașinii este constantă, că reclamele sînt egal distanțate și că minutul în care d-na Smith a făcut socoteala a început și s-a sîrșit între două reclame, care este distanța dintre două reclame consecutive ?

4. CUBUL TĂIAT ȘI COVRIGUL TĂIAT

Un inginer, cunoscut pentru dexteritatea sa în a vedea corect structuri tridimensionale, tocmai servea cafea și covrigi. Înainte de a pune cubul de zahăr în ceașcă, îl așeză pe masă în fața sa și gîndi: dacă trec un plan orizontal prin centrul cubului, secțiunea tăieturii va fi desigur un pătrat. Dacă îl trec vertical prin centru și prin patru colțuri ale cubului, secțiunea va fi un dreptunghi alungit. Dar dacă trec planul astfel. . . ? Spre surpriza lui, văzu că secțiunea va fi un hexagon regulat.

Cum a fost făcută secționarea? Dacă latura cubului este de 1 cm, care va fi latura hexagonului ?

După ce, în sîrșit, inginerul a dat drumul cubului de zahăr în cafea, atenția lui a fost atrasă de covrigul de pe farfurioară. Dacă

44

trec un plan orizontal prin centru, își spuse el, secțiunea va consta din două cercuri concentrice. Dacă trec un plan vertical prin centru, secțiunea va consta din două cercuri separate între ele printr-o distanță egală cu diametrul găurii covrigului. Dar dacă întorc planul așa... Fluieră de mirare. Secțiunea consta de data asta din două cercuri perfecte, care se intersectau!

Cum a fost făcută tăietura? Dacă covrigul este un tor perfect, cu diametrul exterior de 12 cm și avînd gaura de 4 cm diametru, care sînt diametrele cercurilor care se intersectează?

5. ÎMPĂRȚIREA ARIEI MONADEII

Doi matematicieni luau masa într-un restaurant chinezesc de pe West Third Street, în Manhattan, și comentau emblema desenată pe meniul restaurantului (fig. 53).

— Bănuiesc că e unul dintre cele mai vechi simboluri religioase din lume, spuse unul dintre ei. Ar fi greu de găsit unul mai potrivit pentru a simboliza marile opoziții ale naturii; bine și rău, bărbat și femeie, inflație și deflație, integrare și diferențiere...

— Nu cumva aceasta este și emblema liniei de cale ferată Northern Pacific? p •• i-t

— Ba da. După câte știu, unul dintre inginerii companiei a văzut simbolul pe un steag coreean la Expoziția Internațională de la Chicago, în 1893, și a insistat pentru adoptarea lui ca simbol al companiei. El a argumentat că reprezintă perfect cele două extreme, apa și focul, care pun în mișcare locomotiva cu abur.

— Nu crezi că el a inspirat și construcția mingii de baseball?

— Nu m-ar mira.

— Știai însă că există o metodă foarte elegantă de a împărți în două părți egale fiecare

Fig. 53 Emblema sau „monada” coreeană, dintre cele două arii colorate di

45

ferit ale simbolului, prin simpla trasare a unei linii drepte de-a curmezișul cercului?

Presupunând că frontiera dintre cele două regiuni este formată de două semicercuri, găsiți linia dreaptă care împarte simultan regiunile în părți egale.

6. SURORILE CU OCHI ALBAȘTRI

Dacă întâlniți întâmplător două dintre surorile Jones (ceea ce presupune că cele două constituie o selecție aleatoare din mulțimea tuturor surorilor Jones), șansa ca amândouă să aibă ochi albaștri este exact unu la unu.

Câte surori au ochi albaștri printre toate surorile Jones ?

7. CÎT DE VECHI ESTE ROSE-RED CITY2 ?

Doi profesori, unul de engleză și celălalt de matematică, beau împreună o bere la bufetul Universității.

— E ciudat, spuse profesorul de engleză, cum unii poeți pot scrie câte un vers nemuritor, deși tot restul operei lor este fără nici o valoare. John William Burgon, de pildă. Poeziile lui sînt atît de mediocre, încît nimeni nu le mai citește astăzi. Totuși, el este acela care a compus unul dintre cele mai minunate versuri din poezia engleză: „Un oraș roșu ca trandafirul, ca Timpul însuși de două ori mai tînăr”.

Matematicianul, căruia îi plăcea să-și necăjească prietenii cu tot felul de probleme improvizate, se gîndi cîteva clipe, apoi recită: Un oraș roșu ca trandafirul, de două ori mai tînăr ca Timpul însuși, Cu un miliard de ani în urmă, vîrsta cetății Era de exact două cincimi din vîrsta pe care Timpul o va avea Peste un miliard de ani. Puteți socoti Ce vîrsta are astăzi orașul stacojiu?

Bineînțeles, profesorul de engleză uitase de mult timp algebra, așa că schimbă iute subiectul spre alte domenii.

Dar cititorii acestei cărți nu pot avea dificultăți cu această problemă.

8. CONCURSUL ENIGMATIC

Trei licee — „Washington”, „Lincoln” și „Roosevelt” — s-au întîlnit într-o întrecere de atletism. Fiecare dintre școli participa cu un singur om la fiecare probă. Susan, o elevă la liceul „Lincoln”, stătea la peluză și încerca să-și încurajeze prietenul, care era campionul școlii la greutate.

45

Cînd Susan se întoarce acasă seara, tatăl său o întrebă ce a făcut școala sa.

— Am cîștigat bineînțeles proba de greutate, spuse ea, dar întrecerea a fost cîștigată de liceul „Washington”. Au realizat un scor final de 22 de puncte, pe cînd noi am terminat cu 9 puncte, iar liceul „Roosevelt” tot cu atîtea puncte

— Dar cum a fost sistemul de punctaj ? întrebă tatăl.

— Nu-mi amintesc exact, răspuse Susan, dar s-a dat un număr de puncte pentru cîștigătorul fiecărei probe, ceva mai puține puncte pentru cel care a luat locul al doilea și încă și mai puține pentru locul al treilea. Numărul de puncte a fost același pentru fiecare probă. (Prin „număr”, Susan înțelegea desigur un întreg pozitiv.)

— Cîte probe au fost în total ?

— Nu știu, tată. M-am uitat numai la greutate.

— A fost și o probă de săritură în înălțime ? întrebă fratele lui Susan.

— Da.

— Cine a cîștigat-o ? Susan nu știa nici asta.

Oricît ar părea de necrezut, la această din urmă întrebare se poate răspunde numai cu ajutorul informațiilor date.

Care liceu a cîștigat săritura în înălțime?

9. TERMITELE ȘI CEEE 27 DE CUBURI

Imaginați-vă un cub mare, format din alipirea a 27 de cuburi mai mici de lemn și de mărime egală (fig. 54). O termită pornește din centrul feței unui cub oarecare din exterior și sapă un tunel

care o poartă o dată prin fiecare dintre cuburi. Mișcarea ei este întotdeauna paralelă cu o latură a cubului mare, niciodată diagonală.

Este oare posibil ca termita să treacă prin fiecare din cele 26 de cuburi exterioare numai cîte o singură dată iar apoi să-și termine călătoria pă-trunzînd pentru prima oară în cubul central ? Dacă Da, arătați cum ; dacă Nu, demonstrați de ce.

Se presupune, desigur, că termita, o dată intrată în unul dintre cuburile mici, urmează un drum cuprins în întregime în interiorul cubului Fig. 54 Ce drum parcurge termita? mare. Altminteri, ea ar putea ieși a

46
 fără pe undeva pe suprafața cubului mare și s-ar deplasa pe această suprafață pînă la un alt loc de intrare convenabil. Dacă acest lucru ar fi permis, desigur problema nu s-ar mai pune.

RĂSPUNSURI

1. în fig. 55 se arată sfîrșitul „remizat” al unui joc de „evitare a pătratelor”. Această soluție grea și foarte frumoasă a fost descoperită de C. M. McDaury, un student în matematică de la Universitatea din Oklahoma, căruia i-am comunicat problema prin intermediul unuia dintre profesorii săi, Richard Andree.

Doi dintre cititori (William R. Jordan, Scoția, New York, și Donald L. Vanderpool, Towanda, Pennsylvania) au reușit să arate, printr-o enumerare completă a posibilităților, că soluția este unică, exceptînd ușoare variații în cele patru cîmpuri marginale, marcate cu săgeți. Cîmpurile acestea pot fi ocupate de orice culoare, cu condiția doar să nu fie toate monoculore; dar deoarece fiecare jucător nu dispune decît de 18 piese, două din aceste cîmpuri trebuie să fie ocupate de o culoare, iar celelalte două de altă culoare. Pe desen sînt aranjate în așa fel încît oricum ar fi rotit pătratul, ansamblul să se reconstituie dacă se inversează culorile.

Tabla de 6 x 6 este cea mai mare tablă pe care este posibilă remiza. Acest rezultat a fost demonstrat în 1960 de Robert I. Jewett, pe atunci student la Universitatea din Oregon. El a putut arăta că remiza este imposibilă pe o tablă de ordinul șapte — și întrucît orice tablă de ordin mai mare conține un subpătrat de șapte pe șapte, remizele sînt în mod clar imposibile și pe acestea.

David H. Templeton, profesor de chimie la Eaboratorul de radiații Lawrence al Lmiversită- pig 55
 Răspunsul la problema jocului „evitării pății din California (Ber- tratelor”.

o	•	o	•	o	•
•	•	o	o	o	o
o	•	•	o	•	•
•	•	o	•	•	o
	o	o	o	m	•
•	O; ■ -; i, -	•	O;	•	o

46

keley), a observat că cel de-al doilea jucător poate întotdeauna să forțeze remiza printr-o strategie foarte simplă bazată pe simetrie. El poate imita de fiecare dată ultima mișcare a adversarului, fie simetric în raport cu dreapta care desparte tabla în două (paralelă cu baza), fie cu o rotație de 90 de grade în jurul centrului tablei. (Ultima dintre aceste strategii duce la remiza ilustrată în fig. 55.) O altă variantă de strategie este să joace pe cîmpul corespunzător opus de pe linia care trece prin cîmpul jucat de adversar, și prin centrul tablei. Strategii de remiză pentru cel de-al doilea jucător au mai fost trimise de Allan W. Dickin-son, Richmond Heights, ambii din Missouri, și de Michael Merritt, student la Colegiul agricol și mecanic din Texas. Toate aceste strategii sînt aplicabile pe toate tabelele de ordin par și, întrucît remizele nu sînt posibile pe table pare de ordin mai mare decît șase, ele garantează victoria celui de-al doilea jucător pe orice tablă pară de ordin opt sau mai mare. O strategie de reflexie față de dreapta care^ separă tabla în două părți și este paralelă cu una dintre laturi asigură victoria chiar și pe o tablă de ordin șase, fiindcă unica schemă de remiză posibilă nu prezintă acest tip de simetrie.

Strategiile bazate pe simetrie nu dau rezultate pe tablele impare, din cauza existenței unui cîmp central.

Deoarece practic nu se știe nimic despre strategiile pe tablele impare, tabla de ordin șapte este potrivită pentru joc. Jocul nu se poate sfîrși prin remiză și în prezent nimeni nu știe ce parte va cîștiga, chiar dacă ambele joacă rațional.

în 1963, Walter W. Massie, pe atunci un viitor inginer de poduri și șosele la Institutul politehnic Worcester, a scris un program de joc cu „evitarea pătratelor” pentru calculatorul cifric IBM 1620, care a constituit subiectul uneia dintre lucrările sale de sfîrșit de semestru. Programul permite calculatorului să joace primul sau al doilea pe orice tablă pătrată de ordinul patru pînă la zece. Dacă are prima mișcare, calculatorul alege cîmpul la întîmplare. Ea mișcările următoare, el urmează o strategie de reflexie, în afara cazului cînd mutarea prin reflexie formează un pătrat; în acest caz, calculatorul face alegeri întîmplătoare, pînă cînd găsește un cîmp sigur, j- , , |

Pe o tablă de ordin n , numărul de pătrate diferite care pot fi formate din patru câmpuri este dat de formula $(w^4 - 2)/12$. Deducerea acestei relații — ca și a unei relații valabile pentru table dreptunghiulare — poate fi găsită în cartea lui Harry Eangman Play Mathematics (Jucați matematică), Hafner, 1962, pp. 36—37.

După câte știu, problema „evitării triunghiurilor” pe table triunghiulare nu a fost încă abordată.

2. Locomotiva poate interverti locurile vagoanelor A și B și se poate reîntoarce la locul său inițial în șaisprezece operații:

47

1. Locomotiva se mișcă spre dreapta și se cuplează cu vagonul A.
2. Trage pe A pe linia de jos.
3. împinge pe A spre stînga, decuplează.
4. Se mișcă spre dreapta.
5. Face o rotație, în sensul acelor de ceasornic, prin tunel.
6. împinge pe B spre stînga. Se cuplează cu A și B.
7. Trage A și B spre dreapta.
8. împinge pe A și B pe linia de sus. A este decuplat de B.
9. Trage B pe linia de jos.
10. împinge pe B spre stînga, decuplează.
11. Face o rotație în sens invers acelor unui ceasornic, prin tunel.
12. împinge pe A pe linia de jos.
13. Se mișcă spre stînga, se cuplează cu B.
14. Trage pe B spre dreapta.
15. împinge pe B pe linia de sus, decuplează.
16. Se mișcă spre stînga pînă la poziția inițială.

Acest procedeu ar funcționa chiar dacă nu se permite locomotivei să tragă cu partea din față, cu condiția însă ca încă de la început locomotiva să fie așezată cu spatele spre vagoane.

Atît Howard Grossman, din New York, cît și Moises V. Gonzales, din Miami (Florida), au arătat că problema rămîne rezolvabilă chiar dacă se elimină linia laterală din partea de jos; în acest caz, sînt însă necesare două mișcări suplimentare, ridicînd astfel numărul total la 18. Poate cititorul să le descopere ?

3. O trăsătură ciudată a problemei cu reclamele pentru berea Flatz este că nu este necesar să se cunoască viteza mașinii pentru a putea afla distanța dintre ele. Fie x numărul de reclame pe lîngă care mașina trece într-un minut. în timp de o oră, mașina va trece pe lîngă $60x$ reclame. După cum se spune în enunțul problemei, viteza mașinii este de $10t$ mile pe oră. Pe parcursul a $10t$ mile, vor fi depășite $60t$ reclame, deci pe o milă mașina va trece pe lîngă $60t/10t$, adică 6 reclame. Prin urmare, acestea sînt distanțate între ele cu $1/6$ mile, sau 268 m.

4. Un cub, tăiat cu un plan care trece prin mijloacele a șase laturi, ca în fig. 56, duce la o secțiune de forma unui hexagon regulat. Dacă latura cubului este de 1 cm, latura hexagonului va fi de $\sqrt{2}$ cm.

Pentru a tăia un tor astfel încît secțiunea să conste din două cercuri care se intersectează, planul trebuie să treacă prin centru și să fie tangent la tor deasupra și dedesubt, așa cum se vede în fig. 57. Dacă torul are un diametru exterior de 12 cm, iar diametrul găurii este de 4 cm, atunci fiecare cerc al secțiunii va avea, evident, un diametru de 8 cm.

47

Acest mod de tăiere, împreună cu cele două moduri descrise anterior, constituie singurele căi de a tăia un covrig astfel ca secțiunile să fie circulare. Everett A. Emerson, de la atelierul electronic al firmei „National Cash Register” din Hawthorne (California), mi-a trimis o demonstrație algebrică riguroasă că nu există o a patra cale. Fig. 56 Răspunsul la problema secționării cubului.

5. în fig. 58 este arătat modul în care trebuie desenată o linie dreaptă care să împartă în părți egale cele două regiuni ale emblemei din fig. 53. O demonstrație foarte simplă se obține desenînd cele două semicercuri punctate. Diametrul cercului K este egal cu jumătatea diame-

trului emblemei — prin urmare aria lui va fi egală cu un sfert din aria emblemei. Scăzînd regiunea G din acest cerc, și adăugîndu-i regiunea H, regiunea care rezultă are o arie egală tot cu un sfert din aria emblemei. Urmează că aria G este egală cu aria H — și evident jumătate din G va fi egală cu jumătate din H. Linia bisectoare taie în cercul K jumătate din aria G, dar îi restituie o arie egală (jumătate din H), așa că aria desenată hașurat de sub linia bisectoare are aceeași arie ca și cercul K. Aria cercului mic este însă un sfert din aria cercului mare; prin urmare, zona hașurată este împărțită exact în două. Același raționament se poate aplica și zonei albe.

Această demonstrație a fost dată de Henry Dudeney ca răspuns la problema nr. 158 din cartea sa Amusements in Mathematics (Amuzamente matematice). După ce problema a apărut și în „Scientific American”, patru cititori (A. E. Decae, F. J. Hooven, Charles W. Trigg și B. H. K. Willoughby) mi-au trimis o altă demonstrație, care este cu mult mai simplă. Pe fig. 58, desenați un diametru orizontal al cercului mic K. Semicercul de dedesubt al acestei linii are o arie care este în mod clar egală cu $1/8$ din aria cercului mare. Deasupra diametrului se află un sector de 45° al cercului mare (mărginit de diametrul orizontal al cercului mic și de linia diagonală), care este, evident, egal cu $1/8$ din aria cercului mare. Euete împreună, semicercul și sectorul au o arie de $1/4$ din aria

cercului mare; prin urmare, linia

48

Vedere de sus

Fig. 57 Răspunsul la problema secționării covrigului.

diagonală trebuie să împartă în părți egale ambele zone ale simbolului. Pentru diferite moduri de împărțire a celor j două zone prin linii curbe, cititorul este îndrumat să consulte cartea mai sus citată a lui Dudeney, cât și un articol al lui Trigg, împărțirea monadei, apărut în „Mathematics Magazine” voi. 34, nr. 2, noiembrie-decembrie 1960, pp. 107-108.

Monadașau simbolul numit Yin-Yang (purfînd denumirea de T'ai-chi-t'u în China și Tomoye în Japonia) este de obicei de-

Fig. 58. Răspunsul la problema emblemei senat cu O mică pată neagră în coreene. zona albă și cu o mică pată albă în zona neagră. Acest lucru este menit să simbolizeze faptul că marile dualități ale vieții sînt rareori pure, că fiecare conține o părțică din cealaltă. Există o bogată literatură orientală asupra simbolului. Sam Loyd, care a construit mai multe enigme matematice pe baza lui (vezi Sam Loyd's Cyclopedia of Puzzles (Enciclopedia de enigme a lui Sam Loyd, p. 26), l-a denumit Marea Monadă. Termenul de „monadă” este repetat de Dudeney și este folosit de Olin D. Wheeler într-o cărticică intitulată Wonderland (Țara minunilor), publicată în 1901 de compania de căi ferate Northern Pacific. Primul capitol al cărții lui Wheeler este dedicat unui istoric al semnului care a devenit emblema companiei și este plin de informații curioase și de reproduceri în culori din surse orientale. Pentru a afla mai multe despre simbol, puteți consulta următoarele referințe : articolul lui Schuyler Cammann Careul magic de trei în filozofia și religia veche chineză, în History of Religions, voi. 1, nr. 1, vara lui 1961, pp. 37—80 ; cartea mea Ambi-dextrous Universe (Istețul univers), Basic Books, 1965, pp. 249—250; cartea lui George Sarton A History of Science (Istoria științei), vol.1, Harvard University Press, 1952, p. 11. Cari Gustav Jung⁸ citează și el cîteva referințe engleze asupra simbolului în introducerea la cartea sa / Ching (1929).

6. Există probabil trei surori Jones cu ochi albaștri și patru surori în total. Dacă există n fete, dintre care a au ochi albaștri, pro-

Psiholog și psihiatru elvețian, 1875-1961. - N.T.

48

babilitatea ca două dintre ele, alese la întîmplare, să aibă ochi albaștri ,este întrucît ni se spune că această probabilitate este de 1/2, problema se reduce la aflarea valorilor întregi ale lui a și n care dau expresiei de maij sus valoarea 1/2. Valorile minime pentru a și n sînt 3 și, respectiv, 4. Valorile următoare în mărime sînt 15 și 21, dar este extrem de puțin probabil să existe atît de multe surori. Așadar, patru surori, dintre care trei cu ochi albaștri, este aprecierea cea mai plauzibilă.

7. Vîrsta orașului roșu-ca-trandafirul este de șapte miliarde de ani. Fie x vîrsta actuală a orașului, iar y vîrsta actuală a Timpului. Cu un miliard de ani înainte, orașul ar fi avut vîrsta de x — 1 miliarde de ani, iar peste un miliard de ani, vîrsta Timpului va fi de y + 1 miliarde de ani. Datele problemei permit scrierea următoarelor ecuații:

Aceste ecuații dau pentru x (vîrsta actuală a orașului) o valoare de șapte miliarde de ani, iar pentru y (vîrsta actuală a Timpului), o valoare de paisprezece miliarde de ani. Problema se bazează, bineînțeles, pe o teorie a „creării într-o zi” a cosmosului.

8. Din păcate, nu dispun de spațiu suficient ca să redau pe larg rezolvarea problemei concursului athletic ; voi sugera, așadar, procedeul prin care se poate arăta că liceul „Washington” a cîștigat proba de săritură în înălțime. Trei întregi pozitivi diferiți reprezintă punctajele acordate pentru locurile unu, doi și trei în fiecare dintre probe, întregul pentru primul loc trebuie să fie cel puțin 3. Știm că în cadrul concursului au existat cel puțin două probe și că liceul „Diucoln” (care a cîștigat proba de greutate) a avut un punctaj total de 9 — astfel că punctajul acordat pentru primul loc nu poate fi mai mare decît 8. Dar poate fi exact 8? Nu, pentru că în acest caz nu ar putea fi decît două probe și nu ar mai fi astfel posibil pentru liceul „Washington” să acumuleze 22 de puncte. Argumente ceva mai complicate elimină 6, 4 și 3 ca întregi posibili pentru primul loc. Singura posibilitate rămîne 5.

Dacă 5 este numărul de puncte acordat pentru primul loc, atunci trebuie să fie cel puțin cinci probe în concurs. (Mai puține probe nu ar fi suficiente să dea liceului „Washington” un punctaj total de 22,

$$a(a - 1) n(n - 1)$$

$$2x = y$$

$$x-1 = \wedge(y + 1).$$

48

Probe

	1	2	3	4	5	Scoru/

Liceu/ Washington	2	5	5	5	5	22
L liceul Lincoln	5	1	1	1	1	9
Liceu/ Roosevelti	1	2	2	2	2	9

Fig. 59 Răspunsul la problema concursului athletic dintre cele trei licee.

iar mai multe ar ridica punctajul total al liceului „Lincoln” la mai mult de 9). Liceul „Lincoln” a marcat 5 puncte prin câștiga-rea probei de/greutate, așa că celelalte 4 puiecte trebuie^ să fi fost câștigate/ unul câte unul. în acest fel, liceul „Washington” poate să atingă scorul final de 22 de puncte în numai două moduri : 4, 5, 5, 5,3 sau 2, 5, 5, 5, 5. Prima alternativă este eliminată, deoarece ea dă liceului „Roose-velt” un punctaj de 17 — pe cînd punctajul cunoscut este 9. Posibilitatea care rămîne dă pentru liceul „Lincoln” un scor corect, așa că putem sintetiza rezultatele ca în tabelul din fig. 59. Liceul „Washington” a câștigat toate probele, în afară de greutate — prin urmare și săritura în înălțime.

Mai mulți cititori mi-au trimis soluții mai scurte decît cea dată mai sus. Doi dintre ei (d-na Erllys Jedlicka, din Saratoga, California, și Albert Zoch, student la Institutul tehnologic din Illinois) au observat că există o soluție extrem de scurtă dacă presupunem că problema are răspuns unic. Iată ce scrie d-na Jedlicka: „Domnule Gardner, Ați știut că problema poate fi rezolvată fără nici un fel de calcul ? Cheia necesară se află în ultimul paragraf. Soluția ecuațiilor, în numere întregi, trebuie să indice fără ambiguitate care dintre licee este câștigătorul probei de săritură în înălțime. Acest lucru poate fi făcut numai dacă unul dintre licee a câștigat toate probele, exceptînd, se înțelege, greutatea; altminteri, problema nu poate fi rezolvată numai cu informațiile date, chiar și după calcularea punctajelor și numărului de probe. Întrucît liceul care a câștigat proba de greutate nu este și cîștigătoarea finală, este evident că acest câștigător final a învins în total celelalte probe. Prin urmare, fără nici un fel de calcul, se poate spune că liceul „Washington” a câștigat săritura în înălțime”.

9. Nu este posibil ca termita să treacă o singură dată prin cele 26 de cuburi exterioare și apoi să-și sfîrșească drumul în cubul din centru. Acest lucru poate fi ușor demonstrat, închipuindu-ne cuburile alternînd în culoare, asemenea unei table de șah tridimensionale

49

sau unui cristal de sare de bucătărie, în care atomii de sodiu și de clor sînt dispuși alternativ. Cubul mare va consta în acest caz din 13 cuburi de o culoare și din 14 de altă culoare. Drumul termitei va trece întotdeauna prin cuburi care alternează în culoare ; prin urmare, pentru ca drumul să poată cuprinde toate cele 27 de cuburi, trebuie să înceapă și să se sfîrșească pe setul de 14. Cubul central, însă, aparține setului de 13 — așa că drumul este imposibil.

Problema poate fi generalizată în felul următor: un cub de ordin par (care are un număr par de celule pe fiecare latură) are un număr de celule de o culoare egal cu numărul de celule de cealaltă culoare. în acest caz, nu există un cub central, dar un drum complet poate începe pe oricare celulă și se poate sfîrși pe oricare celulă de altă culoare. Un cub de ordin impar are un număr de celule de o culoare mai mare cu 1 decît numărul celulelor de cealaltă culoare, deci drumul complet trebuie să înceapă și să se sfîrșească pe culoarea care este folosită pentru setul mai mare. în cuburile impare de ordinul 3, 7, 11, 15, 19,... celula din centru aparține setului mai mic, deci ea nu poate fi sfîrșit de drum pentru un drum complet. în cuburile impare de ordinul 1, 5, 9, 13, 17,... celula centrală aparține setului mai mare și deci poate servi drept sfîrșit pentru oricare drum complet care a început pe o celulă de aceeași culoare. într-un cub impar, nu este posibil un drum închis, care să meargă prin fiecare celulă, din cauza existenței unui cub suplimentar de o anumită culoare.

Foarte multe probleme bidimensionale pot fi rezolvate rapid printr-o astfel de „probă de paritate”. De exemplu, nu este posibil pentru un pion să pornească dintr-un colț al tablei de șah, să urmeze un drum care să-l ducă o singură dată prin fiecare cîmp și să sfîrșească pe cîmpul din colțul diagonal opus.

CAPITOLUL XIII

Poliominourile și dreptunghiurile perfecte

Poliominourile — aceste fascinante forme care acoperă cîmpuri vecine pe o tablă de șah — au fost introduse în lumea matematicii în 1954 de Solomon W. Golomb, actualmente profesor de inginerie și matematică la Universitatea din California de sud. în revista „Scientific American”, ele au fost luate în discuție pentru prima oară în 1957. De atunci, ele au devenit recreații matematice extrem de populare, pe parcurs fiind scoase la iveală sute de enigme poliominice și de configurații neobișnuite. în următoarele pagini, vom cita dintr-o comunicare a lui Golomb, care ia în discuție unele dintre cele mai recente descoperiri în acest domeniu.

„Formele care reunesc cinci pătrate vecine se numesc pentomino-uri. Există douăsprezece astfel de forme. Dacă sînt aranjate ca în fig. 60, ele se aseamănă cu litere ale alfabetului, iar aceste litere pot fi folosite ca denumiri

pentru piese. Pentru rațiuni mnemotehnice, este util să ne reamintim sfârșitul alfabetului (TUVWXYZ) și cuvântul FIEiPiNe.

Am arătat, în articolele anterioare, că aceste douăsprezece pento-minouri, care totalizează 60 de pătrate, pot forma anumite figuri, ca de pildă dreptunghiuri 3 X 20, 4 x 15, 5 x 12, 6 X 10. Ele pot forma de asemenea o tablă de șah 8 X 8 cu cele patru pătrate rămase în exces situate oriunde vrem pe marginea ei, sub forma unui pătrat 2x2. Dat fiind un pentomino, pot fi folosite nouă dintre celelalte pentru a forma un model la scară al acestuia, de trei ori mai lung și

50

\

Fig. 60

de trei ori mai înalt. Este, de asemenea, posibil ca cele 12 pentominouri să fie aranjate în două dreptunghiuri, fiecare de 5 x 6".

(Această din urmă configurație este cunoscută ca o problemă de suprapunere, deoarece implică forme care pot fi suprapuse. Golomb vorbește despre cinci noi probleme de suprapunere, publicate aici pentru prima dată. Dacă cititorul nu a descoperit între timp plăcerea pe care o pot oferi pentominourile, el este sfătuit să-și confecționeze un set de piese din carton și să-și încerce îndemânarea pe câteva dintre problemele care urmează. În toate aceste probleme, piesele pot fi așezate cu oricare dintre cele două fețe în sus.)

„1. împărțiți cele 12 pentominouri în trei grupuri de câte patru. Găsiți o formă de 20 de pătrate, care poate fi întocmită cu piesele din fiecare grup. Una dintre soluții este ilustrată în fig. 61.

2. împărțiți cele 12 pentominouri în trei grupuri de câte patru. Subîmpărțiți fiecare grup în două perechi de forme. Pentru fiecare grup, găsiți o regiune cu 10 pătrate, care să poată fi formată de fiecare dintre cele două perechi. O soluție este arătată în fig. 62. Poate cititorul găsi și alte soluții, dintre care una fără găuri ?

50

Fig. 61

3. împărțiți cele 12 pentominouri în trei grupuri de câte patru. Adăugați fiecărui grup un monomino (un singur pătrat) și formați un dreptunghi de 3 X 7. Fig. 63 indică soluția. Se știe că ea este unică, cu excepția faptului că în primul dintre cele trei dreptunghiuri pentominoul Y și monominoul pot fi rearanjate, ocupînd totuși aceeași regiune.

Fig. 62

Demonstrația unicității se bazează pe >....., , . r-
o idee a lui C. S. Ivorens. în forma repre- . |
zentată în fig. 64 — ca să începem cu ea (— pentominoul X poate fi folosit numai în '—† r—*
cuplaj cu pentominoul U. Mai departe, nici I__—
unul dintre pentominourile F și W nu pot
fi folosite pentru a completa acest drept- F'g- 64
unghi. De asemenea, datorită faptului că

pentominourile U și X nu pot fi folosite decît împreună, este imposibil să folosim F și W în cadrul aceluiași dreptunghi de 3 x 7. Prin urmare dintre cele trei dreptunghiuri de 3 X 7, unul va conține X și U, altul va conține W (dar nu și U), iar al treilea va conține F (dar nu și U). Cînd se enumera și se compară toate completările posibile ale acestor trei dreptunghiuri (o operație foarte lungă), se constată că soluția indicată este unica posibilă.

4. împărțiți cele 12 pentominouri în patru grupuri de câte trei. Găsiți o regiune de 15 pătrate, care poate fi formată din pentominourile fiecărui grup. Nu se cunoaște soluția acestei probleme — dar nici nu s-a demonstrat că problema este imposibil de rezolvat.

5. Găsiți regiunea cea mai mică de pe tabla de șah, în care încap oricare două dintre cele 12 pentominouri. Aria minimă pentru o astfel de regiune este de nouă pătrate. Există numai două exemple de astfel de regiuni (fig. 65). Valabilitatea oricăreia dintre cele două regiuni desenate se testează prin încercări cu fiecare pentomino în parte. Imposibilitatea găsirii unei regiuni cu mai puțin de nouă pătrate se demonstrează în felul următor: dacă ar fi posibil să se găsească o regiune cu mai puțin de nouă pătrate, atunci pentominourile I, X, și U, în particular, ar încăpea într-o regiune de nu mai mult de opt pătrate. Pentominourile I și X ar avea atunci trei pătrate în comun. (în caz contrar, ar fi nevoie fie de nouă pătrate, fie de o linie dreaptă de șase pătrate, ceea ce este o extravaganță inutilă.) Aceasta poate avea loc numai în două feluri (fig. 66). în ambele cazuri, însă, potrivirea pentomi-noului U ar cere un al nouălea pătrat. Prin urmare, opt pătrate nu sînt suficiente, pe cînd nouă sînt, așa cum s-a arătat ■ _____

I'. ultimul timp, diferite [""""

probleme pentominoice au I—■--

fost abordate cu ajutorul _ calculatoarelor electronice moderne. Capitolul 13 dedi- Fig. 65

prin exemplificare.

50

Fig. 66
LX

cat poliominourilor din cartea Amuzamente matematice de M. Gardner1 conține o relatare scurtă a modului în care Dana S. Scott a programat calculatorul MANIAC de la Universitatea Priuceton să determine toate modurile în care cele 12 pentomino-

uri pot fi potrivite pe tabla de șah de 8×8 , lăsînd o gaură de 2×2 în centru. S-a scos la iveală faptul că există 65 de soluții fundamentale diferite, în sensul că două soluții care diferă numai printr-o rotație sau o reflexie nu sînt considerate ca diferite. Mai recent, C. B. Haselgrove, un matematician de la Universitatea din Manchester (Anglia), a programat un calculator să găsească toate modurile posibile de a forma cu cele 12 pentomino-uri un dreptunghi de 6×10 . Excluzînd rotațiile și reflexiile, el a găsit 2 339 de soluții fundamentale diferite ! Tot el a verificat și programul lui Scott pentru problema tablei de șah de 8×8 .

Anumite configurații speciale cu pentomino-uri oferă prilejuri excelente de recreație. Fig. 67 ilustrează o piramidă de 64 de pătrate, care poate fi formată din 12 pentomino-uri și dintr-un tetromino pătratic de 2×2 . Crucea din fig. 68 necesită numai cele 12 pentomino-uri, dar este neobișnuit de grea. încă neconstruită este forma din fig. 69, deși nu s-a demonstrat că problema este imposibilă. Soluția nu a fost găsită, nici mutînd monomino-ul (gaura) în alt loc. Aproximația cea mai bună, cunoscută la ora aceasta, este ilustrată în fig. 70. Tot imposibilă este considerată și configurația lui Herbert Taylor, arătată în fig. 71, deși nimeni nu a putut demonstra că nu există soluție.

Din fericire, nu toate problemele de acest gen sînt nerezolvabile. Pentru forma ilustrată în fig. 72, de exemplu, matematicianul R. M. Robinson, de la Universitatea din California, a putut demonstra că este imposibil să fie construită din 12 pentomino-uri. Ea are 22 de pătrate „de margine” de-a lungul laturilor. Dacă pentomino-urile sînt examinate separat și se socotește numărul maxim de „pătrate de margine” pe care ele le pot furniza, se găsește că numărul total este de 21, cu unul mai puțin decît este necesar. Acest tip de raționament se poate aplica în mod curent la jocurile cu cuburi în care se urmărește construirea a diferite figuri. De obicei, în astfel de jocuri, se separă

51

Fig. 73
Fig. 74

de la început piesele „de margine” de piesele „de interior”, astfel ca să se poată construi mai întîi conturul figurii.

Poliominourile care acoperă patru pătrate de pe tabla de șah se numesc tetromino-uri. Spre deosebire de pentomino-uri, cele cinci tetromino-uri distincte nu pot forma un dreptunghi. Pentru a demonstra acest lucru, colorați, alternativ în două culori diferite, pătratele a două dreptunghiuri de 4×5 și de 2×10 respectiv — singurele dreptunghiuri care au aria egală cu 20 (vezi. fig. 73). Patru dintre cele cinci tetromino-uri (fig. 74) vor acoperi totdeauna cîte două pătrate de o culoare și două de altă culoare, însă tetromino-ul în formă de T va acoperi trei pătrate de o culoare și unul de altă culoare. Așadar, luate împreună, cele cinci tetromino-uri vor acoperi un număr impar de pătrate cenușii și un număr impar de pătrate albe. Or, ambele dreptunghiuri considerate au cîte 10 pătrate de o culoare, iar 10 este un număr par.

Pe de altă parte, oricare dintr-o serie de pentomino-uri diferite poate fi combinat cu cele cinci tetromino-uri pentru a forma un pătrat de 5×5 . Două dintre exemple sînt ilustrate în fig. 75. Aceasta ridică o întrebare interesantă: cîte pentomino-uri diferite pot fi folosite în acest mod ?

Robert I. Jewett, student în matematică la Universitatea din Oregon — care a mai fost menționat și în capitolul anterior — a propus o problemă cu dominouri (poliominouri de două pătrate), foarte diferită de oricare dintre problemele discutate pînă aici. Este oare posibil să formăm cu dominouri un dreptunghi, în așa fel încît să nu existe

51

Linie slabă

Fig. 75 Fig. 76

nici o linie dreaptă, orizontală sau verticală, care să unească două laturi opuse ale dreptunghiului ? De exemplu, în fig. 76 există o linie verticală prin centru care se întinde de sus pînă jos. Dacă în loc de plăcuțe de domino am folosi cărămizi, dreptunghiul ar prezenta desigur un defect destul de grav. Problema lui Jewett este așadar o problemă de găsire a unor structuri de construcții care să nu aibă „linii slabe”. Mulți dintre cei care atacă această problemă o părăsesc foarte repede, convinși că ea nu are soluții. De fapt, ea are o infinitate de soluții.

Cititorul este invitat să-și procure un set de plăcuțe de domino — setul normal al jocului, care conține 28 de plăcuțe, este arhisuficient — și să încerce să găsească cel mai mic dreptunghi „perfect” care poate fi construit din ele. Soluția acestei frumoase probleme va fi dată în paragraful dedicat răspunsurilor, împreună cu o demonstrație remarcabilă, dată de Golomb, a faptului că nu există pătrate „perfecte” de 6×6 .

ADAOS

De la data cînd acest articol a apărut în „Scientific American”, au fost făcute progrese însemnate în studiul poliominourilor și a dreptunghiurilor perfecte. Cititorul interesat poate consulta cartea lui Golomb Polyominoes

(Poliominouri), publicată la editura Scribner în 1965, în care subiectul este expus pe larg și sînt date multe rezultate noi.

Configurația lui Herbert Taylor (fig. 71) și pătratul dințat din fig. 69 au fost între timp demonstrate a fi imposibile, deși pentru

52

nici una dintre aceste forme demonstrația nu este nici scurtă, nici elegantă. Asupra configurației lui Taylor, am primit demonstrații de la Ivan M. Anderson, Eeo J. Brandenburger, Bruce H. Douglas, Micky Earnshaw, John G. Fletcher, Meredith' G. Williams și Donald E. Vanderpool. Iar pentru pătratul dințat — de la Bruno Antonelli, Eeo J. Barandenburger, Cyril B. Carstairs, Bruce H. Douglas, Micky Earnshaw, E. J. Mayland, jr., și Robert Nelson.

J. A. Eindon, din Surrey (Anglia), a găsit o soluție pentru pătratul dințat avînd monominoul (gaura) pe margine, vecină cu unul dintre colțuri (această soluție apare la p.73 a cărții citate a lui Golomb). Alți cititori au găsit soluții cu monominoul într-un colț. D. C. și B.G. Gunn, din Sussex (Anglia), mi-au trimis 16 variante diferite de acest tip. Nu se cunoaște încă nici o soluție cu monominoul așezat pe margine, pe al doilea loc de la colț. William E. Patton, inginer pensionar din South Boston (Virginia), mi-a scris că el se ocupă încă din 1944 de dreptunghiurile perfecte care pot fi construite din piese de domino. Mi-a trimis cîteva din rezultatele sale, multe dintre ele sugerînd probleme interesante. De exemplu, care este dreptunghiul perfect cel mai mic care are același număr de dominouri pe verticală și pe orizontală? Răspunsul este 5×8 . Cititorii ar putea căuta singuri soluțiile. Noțiunea de pătrat perfect din dominouri sugerează un mare număr de jocuri, care, după cîte știu, nu prea au fost exploatate. De exemplu, jucătorii ar putea așeza pe rînd piese de domino pe o tablă de șah pătrată de mărime potrivită. Cîștigător este cel care completează primul o linie „slabă”. Jocul ar putea fi jucat și invers : cel care completează primul o linie „slabă” pierde jocul.

RĂSPUNSURI

Răspunsurile la problemele piramidei și crucii sînt ilustrate în fig. 77 și fig. 78. Nici una dintre aceste soluții nu este unică. Ea problema: care dintre pentominouri pot fi combinate cu cele cinci tetrominouri, pentru a forma un pătrat de 5×5 , răspunsul este: acest lucru este posibil cu toate pentominourile, în afară de I, T, X și U.

Cel mai mic dreptunghi perfect (dreptunghiul fără linii drepte care unesc laturi opuse), care poate fi construit din piese de domino, are dimensiunile 5×6 . Cele două soluții esențial diferite sînt indicate în fig. 79.

„Nu este greu de arătat, scrie Solomon W. Golomb, că lățimea minimă a dreptunghiurilor perfecte trebuie să fie mai mare decît 4. (Cazurile de dreptunghiuri cu lățimea 2, 3 și 4 pot fi cel mai bine

52

□

Fig. 77 Un răspuns la problema piramidei.

Fig. 78 Un răspuns la problema crucii.

Fig. 79 Răspunsuri la problema dreptunghiurilor perfecte.

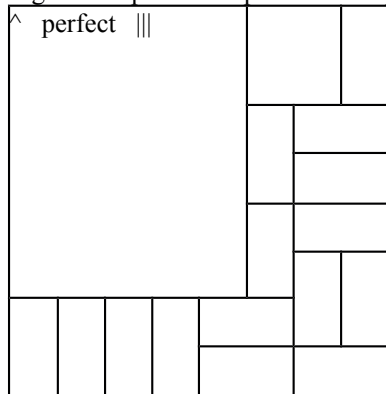


Fig. 80 Un dreptunghi perfect pe o tablă de 8×8 . Fig. 81 Un dreptunghi perfect de 6×8 .

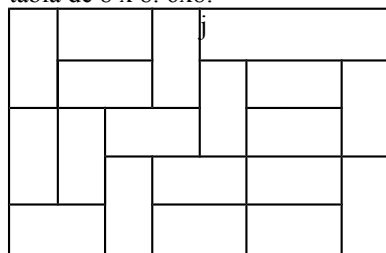


Fig. 82. O soluție generală pentru problema dreptunghiurilor perfecte.

tratate separat.) Prin urmare, deoarece pătratul de 5×5 are un număr impar de pătrate mici, iar piesele de domino acoperă întotdeauna un număr par de pătrate, dreptunghiul de 5×6 reprezintă soluția cea mai mică. Un dreptunghi de 5×6 poate fi continuat pînă la o tablă de șah de 8×8 , satisfăcînd în continuare condiția de „perfectiune”. Un exemplu este ilustrat în fig. 80. Un lucru surprinzător: nu există pătrate perfecte de 6×6 . Pentru acest fapt există o demonstrație cu adevărat remarcabilă. Închipuiți-vă un pătrat de 6×6 , acoperit în întregime cu piese de domino. O astfel de figură conține 18 piese și 10 linii despărțitoare, 5 orizontale și 5 verticale. Ea este perfectă dacă fiecare linie despărțitoare intersectează cel puțin o piesă.

53

Prima etapă a demonstrației constă în a arăta că în orice dreptunghi perfect, fiecare linie despărțitoare trebuie să taie un număr par de piese. Să considerăm o linie verticală oarecare. Aria din stînga ei (exprimată în număr de pătrate unitate) este pară (6, 12, 18, 24 sau 30). Piesele de domino aflate în întregime la stînga acestei linii trebuie să acopere o arie pară, deoarece fiecare piesă acoperă două pătrate. Piesele tăiate de linia despărțitoare trebuie de asemenea să acopere o arie pară în stînga liniei, deoarece această arie este diferența dintre două numere pare (aria totală din stînga și aria acoperită de piesele întregi de domino). Întrucît fiecare piesă tăiată ocupă un pătrat la stînga liniei despărțitoare, trebuie să existe un număr par de piese tăiate de această linie. Pătratul de 6×6 are 10 linii despărțitoare. Pentru a fi perfect, fiecare linie trebuie să întretaie cel puțin două piese de domino. Nici o piesă nu poate fi tăiată de mai mult de o linie despărțitoare, prin urmare cel puțin 20 de piese trebuie să fie tăiate de liniile despărțitoare. Dar în pătratul de 6×6 nu există decît 18 piese!'

Un raționament asemănător arată că pentru ca să existe un dreptunghi perfect de 6×8 , fiecare linie despărțitoare trebuie să întretaie exact două piese de domino. Un astfel de dreptunghi este arătat în fig. 81. Rezultatul cel mai general este următorul: dacă un dreptunghi are o arie pară, iar atît lungimea, cît și lățimea lui depășesc valoarea 4, este posibil să se găsească o acoperire „perfectă” a dreptunghiului cu piese de domino — cu excepția cazului 6×6 . În fapt, pentru toate dreptunghiurile mai mari pot fi obținute acoperiri pornind de la dreptunghiul de 5×6 și de la cel de 6×8 , folosind o metodă de extindere fie a lungimii, fie a lățimii cu 2. Metoda se poate explica mai ușor cu ajutorul fig. 82. Pentru a extinde orizontal cu 2 dreptunghiul de 5×6 , se așază cîte o piesă de domino orizontală lîngă fiecare piesă orizontală de la vechea frontieră, în timp ce piesele verticale sînt deplasate de la frontiera veche spre cea nouă; iar spațiul care se creează astfel este umplut cu două piese orizontale.

Cititorul poate găsi interesant să abordeze problema trominourilor ca elemente de construcție. În particular, care este dreptunghiul minim care poate fi acoperit cu două sau mai multe trominouri drepte (dreptunghiuri de 1×3), fără linii „slabe”?

CAPITOLUL XIV

Defăimătorii lui Euler: descoperirea unui pătrat greco-latin de ordinul 10

Istoria matematicii este plină de speculații inteligente — presupuneri intuitive făcute de oameni cu profundă înțelegere matematică — care deseori au așteptat timp de secole pînă să fie confirmate sau infirmate prin demonstrație. Dar cînd aceasta are în fine loc, el constituie un eveniment matematic de primă mărime. La întîlnirea anuală din aprilie 1959 a Societății americane de matematică s-a întîmplat să fie anunțate nu unul, ci două astfel de evenimente. Unul dintre ele (demonstrația unei vechi conjeturi din teoria grupurilor) nu intră în profilul acestei cărți, dar celălalt — o infirmare a unei celebre presupuneri a marelui matematician elvețian Leonhard Euler¹ — este legat de nenumărate probleme clasice din matematica recreațională. Euler își exprimase convingerea că nu pot exista pătrate greco-latine de anumite ordine. Trei matematicieni (E. T. Parker, de la Corporația „Sperry Rand”, R. C. Bose și S. S. Shrikhande, ambii de la Universitatea din Carolina de nord) au reușit să facă praf conjetura lui Euler. Ei au găsit metode cu care se pot construi un număr infinit de pătrate de tipul pe care specialiștii, urmîndu-l pe Euler, l-au considerat timp de 177 de ani imposibil de construit.

Cei trei matematicieni, porecliți de colegii lor „defăimătorii lui Euler”, au scris împreună o scurtă dare de seamă asupra descoperirii lor. În cele ce urmează, voi cita cîteva fragmente din acest raport,

53

	b		■
o		c	a
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

a		y	S
\	S	a	0
8	y	S	a
0	a	8	y

a a	w	rv	d8
by	aS	da	cp
c.8	dy	a0	ba
d/?	ca	bS	ay

Fig. 83 Pătratul greco-latin (dreapta) este format prin suprapunerea a două pătrate latine (stînga și centru). intercalînd din loc în loc cîteva comentarii proprii destinate să clarifice unele dintre noțiuni sau să rezume anumite pasaje mai tehnice.

„în ultimii ani ai vieții sale, Leonhard Euler a scris un lung memoriu asupra unei noi specii de careu magic: Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques. Astăzi, aceste construcții sînt numite pătrate latine, datorită obiceiului lui Euler de a nota celulele lor cu litere latine.

Să considerăm, de exemplu, pătratul din stînga fig. 83. Cele patru litere latine a, b, c și d ocupă cele 16 celule ale pătratului, în așa fel încît fiecare literă apare o singură dată în fiecare coloană și o singură dată pe fiecare rînd.

Un pătrat latin diferit — celulele lui sînt etichetate cu literele grecești corespunzătoare — este desenat în mijloc.

Dacă suprapunem cele două pătrate, așa cum se arată în dreapta, constatăm că fiecare literă latină intră în combinație o dată, și numai o singură dată, cu fiecare din literele grecești. Cînd două sau mai multe pătrate latine pot fi combinate în acest fel, se spune că ele sînt ortogonale. Pătratul combinat este cunoscut sub numele de pătrat greco-latin".

Pătratul din dreapta oferă o soluție pentru un popular joc de cărți din secolul al XVIII-lea: scoateți dintr-un pachet așii, popii, damele și valeții și aranjați-i sub formă de pătrat, astfel ca fiecare rînd și coloană să conțină toate cele patru valori și toate cele patru „culori". Cititorii s-ar putea amuza căutînd și o altă soluție, în care cele două diagonale principale sînt ocupate și ele de cîte o „culoare" și de cîte o carte de valori diferite.

„în general, un pătrat latin de ordinul n este definit ca un pătrat de $n \times n$, ale cărui n^2 celule sînt ocupate cu n simboluri diferite, astfel ca fiecare simbol să apară o singură dată pe fiecare rînd și o

54

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	0	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	4	0	1	2	3
o	A	0	1						
O	4			2	1	2	3	4	0
4	0	1	2	3	3	4	0	1	2

Fig. 84 Patru pătrate latine de ordinul 5, reciproc ortogonale.

singură dată în fiecare coloană. Sînt posibile mulțimi de două sau mai multe pătrate latine, astfel ca oricare două pătrate din mulțime să fie ortogonale. în fig. 84 sînt prezentate patru pătrate latine de ordinul 5, două cîte două ortogonale, care folosesc cifre drept simboluri".

Pe vremea lui Euler era ușor de demonstrat că nu este posibil un pătrat greco-latin de ordinul 2. Pătrate de ordinul 3, 4 și 5 erau cunoscute, dar ce se putea spune despre cele de ordinul 6? Euler punea problema în felul următor: fiecare dintre șase regimente are cîte șase ofițeri, fiecare de un alt grad. Pot fi oare acești 36 de ofițeri aranjați într-o formație pătrată, în așa fel încît fiecare rînd și fiecare coloană să conțină cîte un ofițer din fiecare grad și din fiecare regiment?

„Euler a arătat că problema celor n^2 ofițeri, care este evident identică cu problema construirii unui pătrat greco-latin de ordinul n, poate fi totdeauna rezolvată dacă n este impar, sau dacă n este un număr „de două ori par" (adică, dacă poate fi divizat prin 4). Pe baza a nenumărate încercări, Euler a afirmat: «Nu ezit să conchid ce este imposibil să se construiască vreun pătrat complet cu 36 de celule, aceeași situație fiind valabilă și pentru

cazurile $H = 10$, $n = 14$ și, în general, pentru toate numerele numai o dată pare» (adică, numerele nedivizibile prin 4). Această afirmație avea să devină celebră sub numele de „conjectura lui Euler”. Mai formal, ea poate fi formulată

55

în modul următor: pentru orice întreg pozitiv k , nu există nici o pereche de pătrate latine ortogonale de ordinul $n = 4k + 2$.

În anul 1901, matematicianul francez Gaston Tarry a publicat o demonstrație a faptului că presupunerea lui Euler este în adevăr valabilă pentru un pătrat de ordinul 6. Tarry, ajutat de fratele său, a ales calea cea mai grea. El a trecut în revistă pur și simplu toate posibilitățile de construire a unui pătrat latin de ordinul 6, și apoi a arătat că nu există nici o pereche care să formeze un pătrat greco-latin. Această demonstrație a mărit, bineînțeles, încrederea în veridicitatea conjecturii lui Euler. Mai mulți matematicieni au publicat chiar „demonstrații” că conjectura ar fi corectă — dar mai târziu s-a arătat că toate conțin erori.

Volumul de muncă implicat în rezolvarea problemei prin enumerarea tuturor posibilităților crește rapid o dată cu ordinul pătratului. Următorul caz nerezolvat, cel al pătratului de ordinul 10, era cu mult prea complicat pentru a putea fi rezolvat pe calea aceasta; chiar și în 1959 el rămânea cu mult în urma posibilităților calculatoarelor electronice. Matematicienii de la Universitatea din California (Eos Angeles) au programat calculatorul SWAC să caute pătrate greco-latine de ordinul 10. După mai bine de 100 de ore de lucru, n-a fost găsit nici măcar unul. Investigarea s-a limitat însă la o porțiune atât de mică a tuturor cazurilor posibile, încât de aici nu se poate trage nici o concluzie. S-a calculat că, dacă conjectura lui Euler este adevărată, calculatorul și programul citat ar fi avut nevoie de cel puțin un secol pentru a o demonstra.

„Ultima frază din memoriul lui Euler sună astfel: «închei în acest punct cercetarea acestei probleme, care, deși de prea puțin folos luată în sine, ne poate duce la observații importante în teoria combinărilor precum și în teoria generală a careurilor magice». Or, în fapt — și acesta este un exemplu izbitor al unității științei — impulsul inițial care a dus la rezolvarea conjecturii lui Euler a venit din nevoile practice ale agronomiei experimentale, iar cercetarea pe care Euler o considera fără valoare practică s-a dovedit pînă la urmă de o importanță capitală în planificarea unor experiențe”.

Sir Ronald Fischer, astăzi profesor de genetică la Universitatea din Cambridge și unul dintre cei mai mari statisticieni ai lumii, a fost primul care a arătat, prin anii 1920, cum pot fi folosite pătratele latine în cercetarea agricolă. Să presupunem, de exemplu, că cineva dorește să testeze, cu o cheltuială minimă de timp și de bani, efectul a șapte tipuri diferite de îngrășăminte chimice asupra creșterii griului. Dificultatea principală care survine în acest tip de cercetări constă în faptul că fertilitatea diferitelor parcele de sol variază de obicei

55

într-un mod foarte neregulat. Cum am putea planifica un experiment care să testeze simultan toate cele șapte îngrășăminte și, în același timp, să elimine interpretările eronate datorate variațiilor necontrolabile ale fertilității? Iată răspunsul: împărțiți lanul de grâu în loturi, care să constituie celulele unui pătrat de 7×7 , apoi aplicați cele 7 „tratamente” cu îngrășăminte după schema unui pătrat latin ales la întâmplare. Mulțumită schemei, o analiză statistică simplă a rezultatelor va elimina orice interpretare greșită cauzată de fertilitatea diferită a solului.

Să presupunem acum că, în loc de o singură varietate de grâu, trebuie să testăm șapte varietăți. Am putea oare planifica un experiment care să țină seama și de această a patra variabilă? (Celelalte trei variabile sînt fertilitatea solului pe rînduri și pe coloane, și tipul de tratament.) Răspunsul este de data aceasta un pătrat greco-latin. Literele grecești indică unde trebuie plantate cele șapte varietăți de grâu, iar literele latine — unde trebuie distribuite cele șapte feluri de îngrășămînt. Și în acest caz analiza statistică a rezultatelor este foarte simplă. Pătratele greco-latine sînt astăzi larg folosite pentru planificarea unor experimente în biologie, medicină, sociologie și chiar în prospectarea pieței. „Lotul”, firește, nu trebuie să fie neapărat o parcelă de teren; el poate fi un animal, un pacient, o frunză, o cușcă cu animale, locul în care se face o injecție, o perioadă de timp, sau chiar un observator sau un grup de observatori. Pătratul greco-latin constituie pur și simplu harta experimentului. Rîndurile sale iau asupra lor evidența uneia dintre variabile, coloanele a alteia, simbolurile latine a celei de-a treia, iar simbolurile grecești a celei de-a patra. De exemplu, laboratorul unei fabrici de medicamente dorește să verifice efectul a cinci tipuri diferite de pilule (dintre care una este un placebo²) asupra unor persoane care fac parte din cinci grupe de vîrstă, din cinci grupe de greutate și care se găsesc în cinci faze diferite ale unei aceleiași boli. Un pătrat greco-latin de ordinul 5, ales la întâmplare dintre toate pătratele posibile de acest ordin, este cel mai bun instrument de planificare de care dispune experimentatorul. Eventualele variabile suplimentare pot fi luate în considerație supra-punînd pătrate latine adiționale. Trebuie totuși avut în vedere că pentru fiecare ordin n , nu există decît cel mult $n - 1$ pătrate reciproc ortogonale.

55

Istoria găsirii de către Parker, Bose și Shrikhande a unor pătrate greco-latine de ordinele 10, 14, 18, 22 etc. începe în 1958, an în care Parker a descoperit un fapt care arunca o gravă îndoială asupra veridicității conjecturii lui Euler. Sub îndrumarea lui Parker, Bose a dezvoltat unele reguli generale foarte eficiente pentru construirea pătratelor greco-latine de ordin superior. Mai apoi, Bose și Shrikhande, aplicînd aceste reguli, au putut construi

un pătrat greco-latin de ordinul 22. Deoarece 22 este un număr nedivizibil prin 4, conjectura lui Euler a fost pentru prima oară infirmată. Este interesant de menționat că metoda de construcție pentru acest pătrat se baza pe soluția unei celebre probleme de matematică recreativă, numită „problema elevelor” propusă de T. P. Kirkman în 1850. Un profesor are obiceiul să-și scoată zilnic cele 15 eleve pentru o scurtă plimbare, aranjându-le în trei coloane de câte cinci eleve. Problema constă în a le aranja astfel încât timp de șapte zile consecutiv nici una dintre eleve să nu se afle mai mult decât o singură dată în același rând cu oricare altă elevă. Soluția acestei probleme constituie un exemplu pentru un important tip de planificare a experimentelor, cunoscută sub numele* de „metoda blocurilor incomplet echilibrate”. (

După ce Parker a văzut rezultatele obținute de Bose și Shrikhande, el a putut elabora imediat o metodă nouă care i-a permis să construiască un pătrat greco-latin de ordinul 10. Acesta este ilustrat în fig. 85. Simbolurile unuia dintre pătratele latine sînt cifrele de la 0 la 9, din partea stînga a fiecărei celule. Cifrele din partea dreaptă a fiecărei celule aparțin celui de-al doilea pătrat latin. Cu ajutorul acestui pătrat, a cărui existență mai este încă negată în multe manuale, statisticienii pot acum planifica, pentru prima dată, experimente în care sînt supravegheate ușor și eficient patru seturi de variabile, fiecare cu cîte zece valori diferite.

(De notat că pătratul de ordinul 3 din colțul din dreapta, jos al pătratului de ordinul 10 este un pătrat greco-latin de ordinul 3. Toate pătratele de ordinul 10 construite la început de Parker și colaboratorii săi conțineau un subpătrat de ordinul 3, în sensul că ace st pătrat mai mic putea fi format întotdeauna prin permutarea rîndurilor și a coloanelor pătratului mai mare. Bineînțeles, schimbarea ordinii rîndurilor și coloanelor nu influențează proprietățile unui pătrat greco-latin. Permutările de genul acesta sînt banale; dacă un pătrat poate fi obținut din altul prin deplasarea rîndurilor sau a coloanelor, cele două pătrate sînt considerate unul și același pătrat. Multă vreme nu s-a știut dacă toate pătratele greco-latine de ordinul 10 conțin negreșit subpătrate de ordinul 3, dar în cele din urmă au fost construite multe astfel de pătrate care nu au o astfel de caracteristică.)

56

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Fig. 85 Pătratul greco-latin de ordinul 10 al lui E. T. Parker. El a reușit să infirme „conjectura lui Euler”.

„0 dată ajunși aici — își încheie cei trei matematicieni raportul — a început o corespondență asiduă între Bose și Shrikhande, pe de o parte, și Parker, pe de alta. Metodele erau rafinate din ce în ce mai mult; în cele din urmă, s-a stabilit că conjectura lui Euler este falsă pentru toate valorile $n = 4k + 2$, unde n este mai mare decât șase.

Bruschețea cu care a fost rezolvată o problemă care timp de aproape două secole pusese matematicienii în încurcătură a surprins pe autori mai mult decât pe oricine altcineva. Ceea ce face evenimentul și mai surprinzător este faptul că noțiunile folosite în rezolvarea problemei nu au fost de loc din profunzimile matematicii moderne”.

ADAOS

în anii de după 1959, viteza de lucru a calculatoarelor electronice a crescut enorm, ca și ingeniozitatea matematicienilor, în a elabora metode de programare din ce în ce mai eficiente. Folosind o tehnică numită „a întoarcerii” (backtrack), Parker a elaborat un program pentru calculatorul UNIVAC 1206, care era în stare să ia un pătrat latin dat, de ordinul 10, și să caute pînă la epuizarea tuturor posibilităților toate pătratele ortogonale cu acesta; operație termi

56

nată în numai 28-45 de minute, ceea ce reprezintă o îmbunătățire de aproximativ un trilion de ori a vechiului program SWAC! Rezultatul: au fost construite sute de noi pătrate greco-latine de ordinul 10. Pînă la urmă s-a dovedit că nimic nu este mai banal decât un pătrat de acest fel. Programul UNIVAC a putut găsi perechi ortogonale pentru mai mult de jumătate din pătratele de ordinul 10 construite la întîmplare care au fost introduse ca

date în calculator.. „Trebuie să tragem concluzia, scrie Parker, că Euler n-a avut nici pe departe dreptate și că argumentele bazate pe calculele mai vechi n-au demonstrat decât că domeniul de cercetat este enorm de mare". Surprinzător însă, pînă la această oră nu a fost găsit nici un grup de trei pătrate latine de ordinul 10 reciproc ortogonale. Mai înainte se demonstrase că pentru un ordin oarecare n , numărul maxim posibil de pătrate latine ortogonale este $n - 1$. Un set de $n - 1$ astfel de pătrate se numește un „set complet". De exemplu, pătratul latin de ordinul 2 are un set complet care constă din pătratul însuși. Pătratul de ordinul 3 are un set complet care ar consta din două pătrate ortogonale, iar pătratul de ordinul 4 are un set complet format din trei pătrate ortogonale. Un set complet de patru pătrate latine reciproc ortogonale de ordinul 5 este ilustrat în fig. 84. (Bineînțeles, oricare două dintre acestea dau, prin suprapunere, un pătrat greco-latin.) Nu există însă un set complet de pătrate ortogonale de ordinul 6 — de fapt nu există nici măcar o pereche. Seturi complete au fost găsite pentru ordinele 7, 8 și 9. Ordinul 10 este prin urmare ordinul cel mai mic pentru care nu se știe încă dacă este sau nu posibil un set complet. Nu se știe nici măcar dacă există un set de trei pătrate.

Problema aceasta capătă un interes deosebit în legătură cu așa-numitele „plane proiective finite". (Cititorul interesat poate găsi amănunte despre aceste structuri fascinante în câteva din referințele indicate în bibliografia pentru acest capitol.) S-a arătat că dacă, pentru un anumit ordin n , există o mulțime completă de pătrate latine ortogonale, atunci este posibil să se deducă din ea construcția unui plan proiectiv finit de ordinul n . Reciproc, dacă pentru ordinul n se cunoaște un plan proiectiv finit, se poate construi un set complet de pătrate latine reciproc ortogonale de ordinul n . Întrucît Tarry a arătat că nu sînt posibile nici măcar două pătrate latine ortogonale de ordinul 6, rezultă că nu este posibil un plan proiectiv finit de ordinul 6. Mulțimi complete (și deci și plane proiective finite) există pentru ordinele 2, 3, 4, 5, 7, 8 și 9. Planul proiectiv finit de ordinul cel mai mic a cărui existență nu a fost nici confirmată, nici infirmată, este cel de ordinul 10. Prin urmare, descoperirea unui set complet de nouă pătrate latine de ordinul 10 va rezolva în același timp și problema foarte importantă a planelor proiective finite de acest ordin.

57

Fig. 86 O broderie bazată pe pătratul greco-latin al lui Parker.

în clipa de față, problema este în afara posibilităților programelor actuale de calcul și este puțin probabil că ea va fi rezolvată fără o mărire considerabilă a vitezei de calcul, sau fără descoperirea unei metode cu totul noi, care să abordeze problema dintr-un unghi cu totul diferit.

Coperta numărului din noiembrie 1959 al revistei „Scientific American" a reprodus o interesantă pictură în ulei a d-rei Emi Kasai, din redacția revistei, bazată pe pătratul greco-latin de ordinul 10 din fig. 85. Cele zece cifre au fost înlocuite prin zece culori diferite, așa ca fiecare celulă să conțină o pereche unică de culori. În fig. 86 este reprodusă o iscusită broderie realizată în 1960 de d-na Karl Wihtol, din Middletown (New Jersey), după pictura de pe coperta revistei. (Broderia devine echivalentă cu pătratul din fig. 85 după ce i se dă o rotație de un sfert de cerc, în sensul acelor unui ceasornic.) Culorile periferice ale fiecărei celule formează un pătrat latin, iar cele din

57

interior - celalalt pătrat latin. În fiecare rînd și coloană fiecare culoare apare o singură dată la periferia celulelor și o singură dată în interiorul acestora. Tabloul original al d-rei Kasai a fost cumpărat de societatea „Remington Rand" și oferit în dar lui T. Parker.

RĂSPUNSURI

Fig. 87 indică un procedeu de a aranja cele 16 cărți astfel ca nici o valoare și nici o „culoare" să nu apară de două ori pe un rînd sau o coloană oarecare, sau pe cele două diagonale principale.

Mg. 87 O soluție pentru problema cu cărți.

De notat că cele patru cărți din colțuri, ca și cele patru cărți centrale, formează de asemenea seturi, în care sînt reprezentate toate valorile, toate „culorile". Ar fi frumos dacă ar exista o soluție care să permită și aranjarea alternativă a culorilor, dar aceasta nu este posibil.

W. W. Rouse Ball, în cartea sa *Mathematical Recreations and Essays* (Recreații și eseuri matematice), p. 190, citează o sursă din 1723 în legătură cu această problemă și spune că ea are 72 de soluții fundamentale diferite, fără a socoti rotațiile și reflexiile ca diferite. Kenry Ernest Dudeney, în *Amusements in Mathematics* (Amuzamente matematice), problema 304, urmărește problema pînă în 1624, cînd a apărut o ediție a cărții lui Claude Gaspar Bachet; el atrage atenția asupra unei erori în calcularea celor 72 de soluții diferite. Numărul soluțiilor este, de fapt, 144. Da același rezultat a ajuns, independent, și Bernard Goldenberg, din Brooklyn, după ce am citat cifra incorectă de 72 în articolul meu.

Dacă se consideră numai rîndurile și coloanele (iguorînd diagonalele principale), atunci este posibil să se găsească soluții în care culorile alternează ca pe tabla de șah. Adolf Karfunkel, din New York, mi-a trimis mai multe soluții de acest gen, dintre care reproduc una :

K-treflă

Q-cupă J-treflă A-caro K-pică

A-cupă

J-pică

Q-caro

J-caro Q-pică K-cupă A-treflă
A-pică K-caro Q-treflă J-cupă
CAPITOLUL XV

Elipsa

Fără îndoială, cercul prezintă la prima vedere o simplitate foarte atrăgătoare, dar o singură privire aruncată elipsei ar putea convinge pînă și pe cel mai mistic astronom că simplitatea perfectă a cercului este vecină cu zîmbetul fără expresie al idiotului. Un cerc are prea puține de spus, în comparație cu ceea ce poate spune o elipsă. Poate că însăși căutarea unor simplități cosmice în cadrul universului fizic este o căutare de acest tip circular — o reflectare a mentalității noastre necomplicate în cercetarea unei lumi exterioare infinit de complexe.

Fric Temple Bell jj__

Mathematics: Queen and Servant of Science (Matematica — regina și slujbașa științei)

Matematicienii au obiceiul de a studia, pentru plăcerea studiului însuși, lucruri care par teribil de nefolositoare. Dar, după secole, studiile lor se dovedesc că au o valoare științifică enormă. Nu există exemplu mai potrivit pentru acest fapt decît lucrările vechilor greci asupra curbelor necirculare de gradul doi: elipsa, parabola și hiperbola. Ele au fost studiate pentru prima dată de unul dintre elevii lui Platon, dar nu și-au găsit nici o aplicație științifică mai importantă pînă în secolul al XVII-lea, cînd Kepler a descoperit că planetele se mișcă pe elipse, iar Galilei a dovedit că proiectilele se mișcă pe traiectorii în formă de parabolă.

Apollonios din Perga, un geometru grec din secolul al III-lea î.e.n., a scris unul dintre cele mai mari tratate antice asupra acestor curbe. Lucrarea sa Conicele a fost prima care a arătat că aceste trei curbe, plus cercul, pot fi obținute prin secționarea, sub unghiuri continuu variabile, a unui con și aceluiași con. Dacă planul de secțiune este paralel cu baza conului, secțiunea rezultantă este un cerc (vezi fig. 88). Dacă planul este ușor înclinat, secțiunea devine o elipsă. Cu cît înclinarea este mai mare, cu atît elipsa devine mai alungită (sau mai excentrică, în limbajul matematic). S-ar putea crede că la o înclinare foarte mare a planului, curba va lua forma unei pere (deoarece cu cît planul pătrunde mai adînc spre baza conului, cu atît conul este mai larg în acea regiune), dar nu se întîmplă așa. Curba rămîne o elipsă perfectă pînă în momentul cînd planul devine paralel cu una dintre generatoarele conului. În acest moment, curba încetează de a se mai

58

Fig. 88 Cele patru tipuri de secțiuni conice.

Închide în ea însăși — brațele ei se prelungesc spre infinit, curba devenind o parabolă. O înclinare și mai mare a planului de secțiune duce la intersectarea acestuia cu un con inversat așezat deasupra primului. Cele două secțiuni conice rezultante sînt cele două ramuri ale unei hiperbole. (O greșeală foarte larg răspîndită presupune că pentru a obține o hiperbolă planul trebuie să fie paralel cu axa conului.) Ele variază ca formă pe măsură ce planul continuă să se rotească, pînă ce degenerază în cele din urmă, în linii drepte. Cele patru curbe poartă numele de curbe de gradul doi, deoarece sînt reprezentările grafice carteziene ale tuturor ecuațiilor de gradul doi care leagă între ele două variabile.

Elipsa este cea mai simplă dintre toate curbele plane care nu sînt nici linii drepte, nici cercuri. Ea poate fi definită în numeroase feluri, dar poate că cel mai ușor de înțeles intuitiv-este următorul: elipsa este drumul (sau locul geometric) al unui punct care se mișcă într-un plan, în așa fel încît suma distanțelor sale la două puncte fixe este constantă. Această proprietate sugerează o binecunoscută metodă

58

Axa mică

Fig. 89 Modul cel mai simplu de a desena o elipsă.

de desenare a elipselor. Înfîgeți două piuneze într-o foaie de hîrtie așezată pe masă, treceți în jurul lor o buclă din ață și țineți cu vîrfurile unui creion bucla întinsă, așa cum se vede în fig. 89. Mișcînd creionul în jurul piunezelor, putem desena foarte ușor o elipsă perfectă. (Lungimea aței nu variază, așa că suma distanțelor dintre vîrfurile creionului și cele două piuneze rămîne constantă.) Cele două puncte fixe ale elipsei (piunezele) se numesc focare. Ele sînt situate pe axa mare. Diametrul perpendicular pe această axă se numește axa mică. Dacă cele două piuneze sînt apropiate treptat una de alta (păstrînd aceeași buclă), elipsele obținute de fiecare dată sînt din ce în ce mai puțin excentrice. Cînd focarele coincid, elipsa devine un cerc. Cu cît focarele se îndepărtează unul de altul, elipsa devine din ce în ce mai alungită, pînă ce degenerază în cele din urmă într-o dreaptă.

58

Fig. 90 Un elipsograf improvizat dintr-o tavă de prăjituri circulară și un disc de carton.

Există multe moduri de a construi elipse. Una dintre cele mai curioase metode poate fi demonstrată cu ajutorul unei tăvi de copt prăjituri de formă circulară și unui disc de carton cu diametru cît jumătate din cel al tăvii. Căptușiți marginea dinăuntru a tăvii cu o hîrtie aspră, care să împiedice alunecarea discului atunci cînd acesta se rostogolește în jurul marginii. Fixați cu bandă adezivă pe fundul tăvii o foaie de hîrtie. Faceți o gaură oriunde în disc și introduceți prin ea vîrfurile unui creion, apoi rostogoliți discul în jurul tăvii, cum se vede în fig. 90. Pe hîrtie va fi desenată o elipsă. Dacă gaura a fost făcută în centrul discului, vîrfurile creionului va desena, desigur, un cerc. Cu cît gaura este mai apropiată de marginea discului, cu atît va fi mai mare excentricitatea elipsei. Un punct de

pe circumferința discului va trasa o elipsă care a degenerat într-o linie dreaptă.

Iată și o altă cale plăcută de obținere a unei elipse. Tăiați dintr-o foaie de hîrtie un cerc mare. Marcați un punct undeva în interiorul cercului, dar nu în centru, apoi îndoiți cercul astfel ca circumferința lui să cadă pe punctul ales. Dezdoiți, apoi îndoiți din nou, alegînd un alt punct pe circumferință — repetînd această operație pînă cînd hîrtia a fost îndoită de multe ori în toate direcțiile. Îndoiturile formează o mulțime de tangente, care conturează o elipsă (vezi fig. 91).

Deși mai puțin simplă decît cercul, elipsa rămîne totuși curba cea mai des înfîlînită în viața de toate zilele.

Motivul acestui lucru îl con-

59

Fig. 91 Prin îndoierea unei foi de hîrtie circulare, astfel ca marginea acesteia să cadă într-un punct excentric fixat, se obține o elipsă.

stituie faptul că orice cerc privit oblic apare ca o elipsă. Mai mult, orice umbră închisă necirculară aruncată pe un plan de un cerc sau de o sferă este o elipsă. Umbrele care cad pe o sferă — curba interioară a Lunii aflată în fază crescătoare, de pildă — sînt mărginite de cercuri mari, dar noi le vedem ca arce eliptice. Înclinați un pahar cu apă (indiferent dacă paharul este cilindric sau conic) și veți constata că suprafața lichidului capătă un contur eliptic.

O minge așezată pe masă aruncă o umbră eliptică care este de fapt secțiunea în planul mesei a unui con de lumină în care mingea se potrivește exact. Mingea stă exact pe unul dintre focarele elipsei. Dacă ne imaginăm o sferă mai mare care este tangentă la suprafața pe partea cealaltă a acesteia și se potrivește exact în același con, sfera aceea va atinge umbra în cel de al doilea focar. Aceste două sfere prilejuiesc următoarea celebră și frumoasă demonstrație (dată de G. P. Dandelin, un matematician belgian din secolul al XIX-lea) a faptului că secțiunea conică este în adevăr o elipsă.

Fie A un punct oarecare pe elipsă. Desenați o linie (indicată în figură prin _____) care trece prin A și prin vîrfurile conului.

Această dreaptă va fi tangentă la cele două sfere în punctele D și E. Trasați o dreaptă de la A la B — punctul, în care sfera mică atinge umbra, dreapta analogă de la A la C — punctul în care sfera mare atinge umbra. AB este egal cu AD, deoarece ambele drepte sînt tangente la o sferă din același punct exterior fix. AE este egal cu AC

59

Fig. 92 Cu ajutorul unei sfere mai mari se poate dovedi că umbra aruncată de l*-sieră mică are formă de elipsă. pentru același motiv. Adunînd cantități egale la cantități egale, obținem:

$$AD + AE = AB + AC.$$

Dar $AD + AE$ este unul și același lucru cu DE . Datorită simetriei conului și sferelor, această dreaptă are o lungime constantă, indiferent unde este ales punctul A pe elipsă. Dacă suma $AD + AE$ este constantă, atunci ecuația de mai sus arată că și suma $AB + AC$ este

59

constantă. Întrucît AB și AC sînt distanțele de la punctul A la două puncte fixe, locul geometric al lui A trebuie să fie o elipsă, cu focarele în B și C.

În fizică, elipsa intervine de foarte multe ori, ca traiectorie a unui obiect care se mișcă pe o orbită închisă, sub influența unei forțe centrale care variază invers proporțional cu pătratul distanței. PIA netele și sateliții, de exemplu, descriu orbite eliptice, centrul de greutate al sistemului fiind plasat în unul dintre focare. Cînd Kepler și-a anunțat marea sa descoperire că planetele se mișcă pe elipse, această descoperire contrazicea în așa măsură credința generală că Dumnezeu nu ar permite traiectorii ale corpurilor cerești care să fie mai puțin perfecte decît cercul, încît Kepler a fost nevoit să-și ceară scuze. Kepler spunea că elipsele sale sînt „bălegar”, pe care a fost nevoit să-l introducă cu scopul de a înlătura din astronomie cantitățile și mai mari de bălegar care se acumulasera în urma încercărilor îndelungate de a păstra orbitele circulare. Kepler însă nu a descoperit niciodată de ce orbitele sînt eliptice; acest pas a fost realizat de Newton, pe baza considerațiilor sale asupra naturii gravitației. Nici chiar marele Galilei nu a putut crede că orbitele nu sînt circulare, deși evidența experimentală era extrem de bogată.

O importantă proprietate de reflexie a elipsei este ilustrată în fig. 93. Desenați o linie dreaptă care să fie tangentă la elipsă într-un punct oarecare. Diniile care unesc acest punct cu focarele fac unghiuri egale cu tangenta. Dacă ne imaginăm elipsa ca o fișie metalică verticală, așezată pe o suprafață plană, atunci orice undă sonoră care se propagă în linie dreaptă din unul dintre focare va lovi fișa și se va reflecta direct către cel de-al doilea focar. Mai mult, dacă unda se mișcă spre margine cu o viteză constantă, ea va atinge al doilea focar după un același interval de timp, indiferent de direcția pe care a avut-o atunci cînd a părăsit primul focar (deoarece distanțele parcurse înainte și după reflexie au o sumă constantă). Închipuți-vă acum un bazin eliptic adînc, umplut cu apă. Inițiem o undă circulară prin introducerea degetului în apă, în unul dintre focarele elipsei. Cîteva clipe mai tîrziu, în celălalt focar vor putea fi Fig. 93 o tangentă face un-văzute sosind din toate direcțiile undele $S_g^{\wedge S^{\wedge}}$ reflectate. cu focarele.

59

Vig. 94 Drumul unei bile de biliard care este împinsă prin unul din focarele elipsei (sus) ; drumul unei bile care nu este împinsă printre focare (mijloc) ; drumul unei bile care este împinsă printre focare (jos).

Lewis Carroll a inventat și propus o masă de biliard circulară. Nu cunosc nici o propunere cât de cât serioasă pentru o masă de biliard eliptică, însă Hugo Steinhaus dă, în cartea sa *Mathematical Snapshots* (Instantanee matematice), republicată recent de Oxford University Press, o analiză surprinzătoare a comportării unei bile pe o astfel de masă. Plasată în unul dintre focare și împinsă (fără rotație proprie) într-o direcție oarecare, bila se va lovi de margine și va trece prin celălalt focar (vezi desenul din partea de sus a fig. 94). Admițând că nu există frecare care să întârzie mișcarea bilei, aceasta va continua să treacă printr-un focar după fiecare ricoșeu. Totuși, după numai câteva drumuri, traiectoria bilei se va confunda practic cu axa mare

60

a elipsei. Dacă bila nu a fost plasată într-un focar și dacă a fost astfel împinsă încît să nu treacă printre focare, ea se va mișca mereu pe traiectorii care sînt tangente la o elipsă mai mică, cu aceleași focare (vezi desenul din mijloc). Dacă bila este împinsă astfel încît să treacă printre focare (ca în desenul din partea de jos), ea se va deplasa la nesfîrșit pe traiectorii care nu se apropie niciodată mai mult de focare decît o hiperbolă avînd aceleași focare.

în opereta *Micadoul* există un cuplet despre un jucător de biliard nevoit să joace

Pe o masă în vînt Cu un tac cam frînt Și eliptice bile !

în romanul *Portret al artistului în tinerețe*², James Joyce are un personaj, profesor, care citează aceste versuri, apoi arată că prin „eliptic” W. S. Gilbert voia să spună de fapt „elipsoidal”. Dar ce este un elipsoid ? Acesta are trei axe principale. Un elipsoid de rotație, mai propriu numit sferoid, este suprafața unui corp în spațiu, obținut prin rotația unei elipse în jurul uneia dintre cele două axe. Dacă rotația se face în jurul axei mici, ea generează un sferoid turtit la poli, asemenea Pămîntului. Rotația în jurul axei mari generează un sferoid alungit, asemănător unei mingi de rugby. Imaginați-vă un astfel de sferoid alungit care are fața interioară lustruită ca o oglindă. Dacă în unul dintre focare se aprinde o luminare, o bucățică de hîrtie pusă în celălalt focar va lua foc. Camerele care au tavanul sferoidal pot fi pe drept cuvînt numite „camere ale șoaptelor”. Sunete foarte încete emise în unul din focare pot fi auzite clar în celălalt focar. În Statele Unite, cea mai cunoscută „galerie a șoaptelor” se află în sala statuilor, de la Capitoliu. Nici un ghid nu uită de acest lucru atunci cînd își conduce grupul de turiști.

Atît sferoidul turtit, cît și cel alungit dau secțiuni circulare dacă sînt tăiate cu planuri perpendiculare pe una dintre cele trei axe de coordonate și secțiuni eliptice dacă planul este perpendicular pe celelalte două axe. Atunci cînd nici una dintre cele trei axe nu este egală cu celelalte, și toate secțiunile perpendiculare pe axe sînt elipse, forma este un elipsoid veritabil (fig. 95). Aceasta este forma pe care

60

tînd să o ia pietricelele de pe o plajă după ce au fost multă vreme spălate de ape.

Problemele distractive „eliptice” sînt destul de rare. Iată două mai ușoare:

1. Arătați că nici un poligon regulat cu mai mult de patru laturi nu poate fi înscris într-o elipsă, în așa fel ca toate vîrfurile sale să printr-un elipsoid are "Tor- să se afle Pe perimetrul elipsei, ma de elipsă. 2. În metoda de construire a elipsei prin

îndoirea unei foi de hîrtie circulare, explicată mai înainte, centrul cercului și locul marcat cu un punct constituie focarele elipsei. Arătați că curba conturată de îndoitori este în adevăr o elipsă.

ADAOS

Henry Dudeney, în problema nr. 126 din cartea *Modern Puzzles* (Enigme moderne), explică metoda piunezelor și a nucleii de ață pentru construirea elipselor, apoi întrebă cum poate fi folosită această metodă pentru desenarea unei elipse cu axa mare și axa mică date. Metoda este foarte simplă:

Desenați mai întîi cele două axe. Problema constă acum în a găsi cele două focare A și B ale unei elipse care are aceste axe. Fie C unul dintre capetele axei mici. Punctele A și B sînt simetric așezate pe axa mare, în locuri pentru care atît AC, cît și CB sînt egale cu jumătatea lungimii axei mari. Este ușor de arătat că o buclă de ață cu lungimea egală cu perimetrul triunghiului ABC poate servi la trasarea elipsei cerute.

Mese de biliard eliptice au fost puse efectiv în vânzare în Statele Unite. O reclamă pe o pagină întreagă a ziarului „The New York Times” din 1 iulie 1964 anunța că a doua zi jocul poate fi cumpărat la magazinul „Stern”, prezentarea lui fiind asigurată de stelele de cinematograf Joanne Woodward și Paul Newman. Sub numele de *Elliptopool**, jocul este o invenție brevetată a lui Arthur Frigo, din Torrington (Connecticut), pe vremea aceea student la Colegiul unional din Shenectady. Datorită faptului că singurul buzunar al mesei se află în unul dintre focare, pe ea se pot executa nenumărate lovituri foarte interesante.

Articolul despre biliard din cea de-a unsprezecea ediție a Enciclopediei Britanice cuprinde o notă de subsol care spune: „în anul 1907,

60

în Anglia a fost introdusă, ca o schimbare, o masă ovală”. Totuși, nici aceasta, nici masa propusă de Lewis Carroll nu dispuneau de nici un buzunar, în iulie 1964, Edwin E. Robinson, din Pacifica (California), a brevetat sub numărul 198571 o masă circulară cu patru buzunare.

RĂSPUNSURI

1. Nici un alt poligon regulat în afară de pătrat nu poate fi înscris într-o elipsă, deoarece colțurile oricărui poligon regulat sînt p.g. g. Explicația formării elipselor prin în. așezate pe un cerc. Un cerc doirea unei hîrtii circulare.

nu poate intersecta o elipsă

în mai mult de patru puncte. Prin urmare, nici un poligon regulat cu mai mult de patru vîrfuri nu poate fi plasat cu toate vîrfurile sale pe o elipsă. Această problemă a fost propusă revistei „Mathematics Magazine” (numărul din septembrie-octombrie 1960) de către M. S. Klamkin.

2. Demonstrația faptului că metoda de construire a unei elipse prin îndoirea unei foi de hîrtie conduce în adevăr la o elipsă, se face în felul următor (vezi fig. 96). Fie punctul A orice punct ales pe o hîrtie circulară, diferit de centrul cercului (O). Hîrtia este astfel îndoită încît un punct oarecare B de pe circumferință să cadă în A. Aceasta produce o îndoitură de-a lungul liniei XY. Deoarece XY este bisec-toarea dreptei AB, segmentele BC și AC trebuie să fie egale. Este evident că $OC + AC = OC + CB$. $OC + CB$ este raza cercului, care nu poate varia, prin urmare și $OC + AC$ trebuie să fie constant. Întrucît $OC - f$ AC este suma distanțelor dintre punctul C și două puncte fixe A și O, locul geometric al lui C atunci cînd B se mișcă în jurul cercului, trebuie să fie o elipsă cu focarele în A și O.

Îndoitura XY este tangentă la elipsă în punctul C, deoarece ea

61

face unghiuri egale cu dreptele care unesc punctul C cu focarele. Acest lucru poate fi ușor stabilit, notînd că unghiul XCA este egal cu unghiul XCB, care, la rîndul său, este egal cu unghiul YCO. Deoarece îndoiturile sînt întotdeauna tangente la elipsă, elipsa devine înfășură-toarea mulțimii infinite de îndoituri care pot fi făcute repetînd de multe ori îndoirea hîrtiei. Această demonstrație este luată din broșura lui Donovan A. Johnson intitulată Paper Folding for the Mathematics Class (îndoituri din hîrtie pentru studiile de matematică), publicată în 1957 de Consiliul național al profesorilor de matematică.

CAPITOLUL XVI

Pătratele cu 24 de culori și cuburile cu 30 de culori

Un joc normal de domino constă din 28 de plăcuțe negre, împărțite fiecare în cîte două pătrate, care fie că sînt goale, fie că au marcate pe ele un număr de puncte albe. În set nu există plăcuțe identice, iar luate împreună, ele reprezintă cele 28 de moduri posibile în care pot fi combinate două cîte două numerele de la 0 la 6. Plăcuțele pot fi considerate ca segmente de dreaptă care, atunci cînd sînt așezate cap la cap, formează lanțuri liniare; în acest sens, orice joc de domino este strict unidimensional. Cînd noțiunea de domino este extinsă la piese bi- și tridimensionale, iau naștere tot felul de recreații variate și foarte puțin cunoscute. Percy Alexander MacMahon, un specialist englez de prestigiu în analiza combinatorie, a dedicat multe studii acestor „superdominouri”. Materialul care urmează este luat din cartea sa New Mathematical Pastimes (Distracții matematice inedite), publicată în 1921.

Pentru un domino bidimensional, formele cele mai convenabile sînt triunghiul, pătratul și hexagonul, deoarece în fiecare dintre aceste cazuri poligoanele regulate pot fi astfel aranjate, încît să acopere complet un plan. Dacă se folosesc pătrate, iar laturile lor sînt etichetate în toate modurile posibile cu ajutorul a n simboluri, poate fi formată o mulțime de $\frac{n(n+1)}{2}$ pătrate. Fig. 97 arată

întregul set de 24 de dominouri pătrate care rezultă cînd $n = 3$. Dacă cititorul își va construi din carton un astfel de set, el va dispune de cele necesare pentru un joc extrem de distractiv. Este mai conve-

61

nabil să folosim culori în locul simbolurilor. Problema constă în a asambla toate cele 24 de pătrate, în așa fel încît să formeze un dreptunghi de 4×6 , cu două condiții: 1) fiecare pereche de laturi care se ating trebuie să fie de aceeași culoare; 2) marginea dreptunghiului, de jur împrejur, trebuie să fie de aceeași culoare. Se presupune că pătratele de carton sînt colorate numai pe o parte. Pentru marginea dreptunghiului poate fi aleasă orice culoare — la fiecare alegere fiind posibile un număr mare de soluții diferite.

Dreptunghiul de 4×6 este singurul care poate fi format în condițiile date. Un dreptunghi de 2×12 este în mod evident imposibil, deoarece el ar cere ca fiecare pătrat să aibă aceeași culoare ca marginea. Poate cititorul demonstra, privind cele 24 de pătrate colorate din fig. 97, că un dreptunghi de 3×8 este de asemenea imposibil?

În trei dimensiuni, cubul este singura formă care permite, prin asamblarea cu alte cuburi identice, să se umple complet un spațiu tridimensional; din această cauză, el poate fi foarte bine ales pentru dominoul tridimensional: Dacă pentru fețe sînt alese două culori, nu pot fi colorate distinct decît cel mult zece cuburi — un număr prea mic pentru a prezenta interes. Pe de altă parte, folosind trei culori ar rezulta prea multe cuburi (57). Cu șase culori, numărul sare la 2226, dar din această mulțime putem selecta o submulțime de 30 care este ideală pentru scopurile noastre. Ea constă din cuburi care poartă pe cele șase fețe ale lor cele șase culori diferite.

Este ușor de văzut că 30 este numărul maxim. O față roșie, să zicem, trebuie să existe pe fiecare cub. Pe fața opusă acestei fețe roșii poate fi oricare dintre cele cinci culori rămase. Cele patru culori rămase pot fi plasate în șase moduri diferite, așa că numărul total de cuburi diferite trebuie să fie de $5 \times 6 = 30$. (Două cuburi sînt

considerate diferite dacă este imposibil să fie așezate unul lângă altul, în așa fel încît fețele de aceeași culori să corespundă.) Fig. 98 arată cele 30 de cuburi, sub formă desfăcută.

Cele 30 de cuburi — descoperite după cît se pare de MacMahon — au devenit un joc clasic de geometrie recreativă. Nu este prea ușor de confecționat un set, dar efortul este pe deplin răsplătit. Un set de cuburi frumos colorate este o jucărie de familie nemaipomenit de fascinantă; ea nu necesită baterii de schimb și durează ani de zile. Cuburi din lemn sau din material plastic pot fi cumpărate la orice magazin de jucării. În loc de a le vopsi, fețele cuburilor pot fi acoperite cu hîrtie colorată.

Ca exercițiu introductiv, alegeți pe oricare dintre cele 30 de cuburi. Găsiți apoi un al doilea cub care poate fi așezat lîngă primul, astfel ca fețele care se ating să se potrivească la culoare, fețele de la

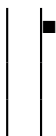
62

m

IDi HU

ffl

□1



1

I

■

Fig. 98 Cele 30 de cuburi colorate, prezentate sub formă desfăcută.

■

8

capete să fie de o a doua culoare, iar celelalte patru culori să se găsească pe celelalte patru fețe, fiecare față laterală a solidului fiind într-o singură culoare. Este întotdeauna posibil să realizați acest aranjament. Deoarece cele două cuburi sînt unul imaginea în oglindă a celuilalt, înseamnă că fiecare cub — ca și fiecare particulă elementară a materiei — are „anticubul” său.

62

(Căutînd un anumit tip de cub, se economisește mult timp dacă aliniem cuburile în șiruri și întoarcem dintr-o dată un șir întreg. De pildă, să presupunem că ne uităm după cuburile care au roșu și albastru pe fețele opuse. Aranjați într-un șir un grup de cuburi cu roșul deasupra, dați șirului două sferturi de rotație și scoateți afară toate cuburile care au acum albastrul deasupra. Sau, să presupunem că dorim să alegem cuburile care au albastru, galben și verde pe fețele care se întîlnesc într-un colț. Formați un șir cu cuburi care au albastrul deasupra, întoarceți-l cu fața în jos și scoateți cuburile care au deasupra verde și galben. întoarceți cuburile rămase în așa fel ca verdele să vină deasupra, apoi răsuciți șirul cu fața în jos și eliminați cuburile care au pe fața de sus albastru și galben. Cuburile rămase vor fi toate de tipul dorit.)

Nu este posibil să se formeze un lanț liniar constînd din mai mult de două cuburi, care să aibă pe toate fețele laterale cîte o singură culoare, dar se poate ușor construi un șir de șase cuburi care să aibă pe fiecare față toate cele șase culori. O problemă foarte amuzantă este construirea acestui șir în așa fel ca toate fețele care se ating să aibă culori identice, iar cele două fețe de la capetele șirului să fie, de asemenea, identice.

Iată acum un joc ceva mai complicat. Alegeți un cub oarecare și așezați-l pe una din fețe. Din cele 29 de cuburi rămase, alegeți opt, în așa fel ca ele să formeze un cub cu dimensiunile $2 \times 2 \times 2$ și care este copia perfectă a cubului inițial (cu excepția dimensiunilor). În plus, fiecare pereche de fețe care se ating trebuie să se potrivească la culoare. (MacMahon atribuie prietenului său, colonelul Julian R. Jocelyn, descoperirea faptului că acest lucru poate fi întotdeauna făcut, indiferent care cub este ales la început.)

Numai un singur set de opt cuburi vor fi potrivite pentru acest joc, și ele nu pot fi găsite ușor dacă nu se procedează sistematic. Cea mai bună cale de urmat este, probabil, următoarea. Notați cele trei perechi de culori de pe fețele opuse ale prototipului, apoi eliminați dintre cele 29 de cuburi pe toate acelea care au pe fețele lor opuse una dintre cele trei perechi de culori ale prototipului. Vor rămîne 16 cuburi. Așezați prototipul astfel ca unul dintre colțurile sale de sus să fie îndreptat spre dv. și să vedeți deci numai cele trei fețe care se întîlnesc în acel colț. Printre cele 16 cuburi veți găsi două care pot fi așezate în așa fel încît aceleași trei culori să fie dispuse în aceleași poziții ca pe prototip. Puneți-le deoparte. întoarceți cubul ales la început astfel ca alt colț al său să fie îndreptat spre dv. și găsiți cele două cuburi care au fețele colorate identic cu cele ale acestui colț al prototipului. Cele opt cuburi astfel selectate — cîte două pentru

62

6

Fig 99 Metoda lui Lyons de a transforma un anumit model în cea de-a doua formă a sa.

1. Acest model este colorat în roșu pe partea de sus și în negru pe partea de jos. întoarceți cuburile astfel încât fețele interioare roșii și negre să ajungă în poziția arătată. Mutați jumătatea de sus a modelului spre dreapta.
2. Dați fiecărei coloane un sfert de rotație, în direcția indicată de săgeți, pentru a aduce roșul pe partea de jos a pătratelor din stînga și negrul pe partea de sus a pătratelor din dreapta.
3. Desfaceți pătratele și a-duceți capetele marcate cu A împreună, pentru a forma două rînduri.
4. Mutați un cub din stînga spre capătul drept al fiecărui rînd.
5. Rupeți fiecare rînd în două părți egale, aducînd apoi fețele negre (în stînga) sau roșii (în dreapta) la un loc.
6. Așezați grupul din dreapta deasupra celui din stînga. Ați obținut astfel cea de-a doua formă a modelului. fiecare colț al prototipului — sînt tocmai cuburile cerute. Acum este foarte simplu să construiți modelul. De fapt, există două căi esențial diferite de a construi modelul cu aceste opt piese. D. Vosburgh Lyons, un neuropsihiatru din Manhattan, a elaborat ingeniosul procedeu ilustrat în fig. 99, care permite transformarea fiecăruia din aceste modele în cea de-a doua formă a sa. Cele două modele sînt legate între ele într-un mod remarcabil. Cele 24 de fețe exterioare ale unui model sînt cele 24 de fețe interioare ale celuilalt, iar dacă cele două modele sînt orientate similar, fiecare cub dintr-un model este diagonal opus cu poziția sa în celălalt. Dyons a observat că după ce a fost construit un model, este întotdeauna posibil să alegem un nou prototip dintre cele 21 de cuburi rămase, apoi să construim un model de $2 \times 2 \times 2$ pentru noul prototip cu ajutorul a opt dintre cele 20 de cuburi. Foarte puțini reușesc să facă aceasta — dacă nu sînt avizați că noul prototip trebuie să fie imaginea în oglindă a celui dintîi. Cele opt cuburi necesare pentru construirea modelului sînt tocmai cele opt cuburi înlăturate din 16 în ultima etapă a procedurii de alegere a pieselor pentru modelul primului prototip. Au mai fost propuse și alte jocuri de construcție cu cuburi colorate. Următoarele modele $2 \times 2 \times 2$, întotdeauna posibile, au fost luate din cartea *Das Spiel der 30 Bunten Wiirfel* (Jocul celor 30 de cuburi colorate), de Ferdinand Winter, publicată la Leipzig în 1934. în toate aceste modele, cuburile trebuie să respecte regula de la domino: fețele care se ating trebuie să aibă aceeași culoare.

1. O culoare pe fețele din dreapta și din stînga, o a doua culoare pe fețele din față și din spate, o a treia culoare deasupra și o a patra dedesubt.

2. O culoare pe două fețe opuse și culori diferite pe celelalte patru fețe.

3. O culoare pe fețele din dreapta și din stînga, o a doua culoare în față și în spate, celelalte patru culori rămase deasupra (cu fiecare pătrat de o altă culoare) și aceleași patru culori dedesubt.

4. Fiecare față în patru culori, aceleași patru culori pe fiecare față.

în aparență, nu este posibil să construim un cub de $2 \times 2 \times 2$ care să aibă o culoare în față și în spate, o a doua culoare la dreapta și la stînga, o a treia dedesubt și deasupra și la care toate fețele care se ating să fie de aceeași culoare. Este posibil să construim un cub de $3 \times 3 \times 3$ avînd fiecare față de o culoare diferită, dar nu fără a încălca legea referitoare la culorile fețelor care se ating, din jocul de domino.

63

Jocuri de tip domino pot fi jucate cu orice piese bi- și tridimensionale. Firma „Parker Brothers” mai are încă în vânzare un joc foarte plăcut, cu numele de Contack, lansat în 1939, care se joacă cu plăcuțe în formă de triunghiuri echilaterale. Dintre mai multe jocuri propuse pentru setul de cuburi colorate, cel cunoscut sub numele de Turnul colorat pare a fi cel mai bun.

Doi jucători se așază față în față. Fiecare are dinaintea un ecran, care poate fi ușor confecționat dintr-o bucată de carton lată de circa 25 cm și avînd capetele îndoite ca să poată sta în picioare. Cuburile sînt puse într-o cutie în care nu pot fi văzute, dar din care pot fi scoase unul cîte unul; poate fi folosit în acest scop și un săculeț.

Fiecare dintre parteneri scoate șapte cuburi din cutie și le așază în spatele ecranului, unde nu pot fi văzute de adversar. Primul jucător deschide jocul prin așezarea unuia dintre cuburile sale în mijlocul

mesei. (Avantajul de a deschide jocul poate fi cîștigat prin aruncarea unui cub, după ce unul dintre parteneri a numit trei culori ; dacă una dintre acestea cade deasupra, partenerul joacă primul.) Al doilea jucător așază apoi un cub alături de primul, avînd grijă ca fețele care se ating să fie de aceeași culoare. Jucătorii adaugă alternativ cuburi structurii, clădind astfel un turn care se sprijină pe o bază formată din patru cuburi. Scopul fiecăruia dintre parteneri este să scape de cuburile lui.

Regulile sînt următoarele:

1. Fiecare etaj de patru cuburi trebuie să fie completat înainte de a începe un nou etaj.

2. Un cub poate fi așezat oriunde pe un loc gol în etaj, cu următoarele două condiții : toate fețele care se ating trebuie să fie de aceeași culoare; mutarea nu trebuie să facă imposibilă continuarea jocului pe etaj. în fig. 100, de exemplu, cubul A ar fi incorect jucat dacă oricare dintre fețele sale ar întîlni sub unghiuri drepte o față liberă de aceeași culoare.

Fig. 100 jocul Turnul colorat. 3- Dacă unul dintre parteneri nu poate rai. juca nici unul dintre cuburile sale, el trebuie

63

să scoată un altul din cutie. Dacă acest cub poate fi jucat, el continuă jocul. Dacă nu poate, sau nu dorește să-l joace, își așteaptă din nou rîndul.

4. Dacă pentru motive strategice un jucător dorește să lase-i treacă rîndul, el îl poate lăsa în orice moment, dar trebuie să scoată un cub din cutie.

5. Jocul se sfîrșește atunci cînd unul dintre jucători a reușit să scape de toate cuburile. El capătă 3 puncte pentru cîștigarea jocului, plus cîte un punct pentru fiecare din cuburile rămase în stoc la adversar.

6. Dacă toate cuburile au fost scoase din cutie, se joacă alternativ pînă cînd unul dintre jucători nu poate, sau nu dorește, să joace. Atunci joacă celălalt jucător, pînă ce adversarul său poate sau dorește să joace. Dacă nici unul nu poate, sau nu dorește să joace, jocul se sfîrșește și cel care are mai puține cuburi este cîștigător. El capătă un număr de puncte egal cu surplusul de cuburi din stocul adversarului.

7. Sfîrșitul unui set de partide poate fi stabilit dinainte la un număr anumit de puncte.

Cei care joacă Turnul colorat de mai multă vreme ajung să descopere diferite strategii care conduc la cîștigarea jocului. Să presupunem, de pildă, că partenerul tocmai a început un nou etaj, iar dv. mai aveți doar două cuburi. Ar fi neînțelept să jucați în diagonală față de cubul plasat de el, în așa fel încît cubul care va rămîne să nu mai poată fi jucat ulterior pe nici una dintre pozițiile cu trei fețe rămase. S-ar putea să fie mai bine să jucați alături de cubul partenerului, pentru a vă păstra deschisă posibilitatea de a continua la mișcarea următoare. Descoperirea unor astfel de strategii transformă învățarea focului într-o experiență stimulatorie și conduce la îndemnare la joc, ceea ce crește considerabil șansele de cîștig.

Dacă vreun cititor are sugestii în vederea îmbunătățirii jocului Turnul colorat, aș fi bucuros să le aflu; de asemenea, orice sugestie asupra altor jocuri cu cuburi colorate. Cele 30 de cuburi colorate au apărut pe lume de peste 70 de ani, dar este foarte probabil că ele mai conțin încă multe surprize.

ADAOS

Cînd am explicat jocul cu cele 24 de pătrate colorate ale lui MacMahon, am comis gafa de a spune că el are o singură soluție (deoarece am interpretat greșit una dintre observațiile lui MacMahon). Este cea mai gravă neînțelegere care s-a strecurat vreodată în această rubrică din revistă. Am primit scrisori de la circa 50 de cititori, care

64

mi-au trimis cîte cel puțin două soluții. Thomas O'Beirne și-a consacrat acestui joc rubrica Enigme și paradoxuri, din numărul din 2 februarie 1961 al revistei „The New Scientist” și a arătat cum pot fi obținute zeci de soluții.

Da Buenos Aires, problema a atras atenția lui Federico Fink. Împreună cu cîțiva prieteni, el a găsit sute de soluții diferite, iar după numai cîteva luni, lista a ajuns la cîteva mii (rotațiile și reflexiile neconținînd, firește, ca soluții diferite). La 20 noiembrie 1963, el mi-a scris că, după estimările sale, numărul soluțiilor diferite s-ar ridica la 12 224.

Problema a fost definitiv rezolvată la începutul anului 1964. Fink a propus lui Garv Feldman, de la Centrul de calcul al Universității Stanford (Palo Alto, California), să scrie un program pentru problemă, ceea ce Feldman a și făcut. Folosind un program scris în AUGOL1 și lucrînd aproximativ 40 de ore, calculatorul B—5000 al centrului, a întocmit o listă a tuturor soluțiilor posibile. Numărul lor este de 12 261. Fink greșise cu numai 37' — o previziune cu adevărat uimitoare.

Ar fi nevoie de multe pagini pentru a trece în revistă principalele rezultate la care a ajuns Fink analizînd cele 12 261 de soluții. Nici una dintre ele, din păcate, nu prezintă simetrie bilaterală. Numărul maxim de „carouri” (pătrate monoculare formate din două triunghiuri dreptunghice) care apar alăturate în așa fel încît formează un poliominou de o singură culoare este 12. Fig. 101, stînga, prezintă o astfel de soluție; poliominoul de ordinul 12 are simetrie bilaterală și seamănă cu un rac. Numărul minim de „carouri izolate” (carouri înconjurate complet de alte culori) este trei. Fig. 101, mijloc, este o soluție în care fiecare din cele trei carouri izolate sînt de culori diferite. Numărul maxim de carouri izolate este 13, așa cum este exemplificat în fig. 101, dreapta.

De observat că toate cele trei soluții ilustrate conțin o „punte” orizontală din trei carouri izolate, avînd culoarea marginii, care leagă marginea din dreapta de cea din stînga. În rubrica sa din „New Scientist”, O'Beirne a demonstrat că orice soluție trebuie să aibă o astfel de punte. Poziția punții, împreună cu alte pete care au culoarea marginii, oferă un criteriu convenabil de clasificare a celor 20 de specii diferite de soluții. (O'Beirne menționase 18, dar Fink a găsit mai tîrziu încă două.)

Multe jocuri recreative cu cuburi colorate așteaptă încă să fie cercetate. De exemplu, dintr-un set de 57 de cuburi colorate în una,

64

Fig. 101 Trei dintre cele 12 261 de soluții ale problemei cuburilor colorate: racul (stînga), trei carouri izolate de culori diferite (mijloc) și 13 carouri izolate (dreapta).

două și trei culori, pot fi alese 27 de cuburi care sînt colorate fiecare în cel mult două culori. Întrucît din 27 de cuburi se poate forma un cub cu dimensiunile $3 \times 3 \times 3$, aici există fără îndoială interesante probleme de construcție. Sau s-ar putea lucra cu subsetul de 30 de cuburi care au cîte trei culori pe fiecare cub. Unele dintre construcțiile care nu sînt posibile cu cele 30 de cuburi colorate în șase culori, s-ar putea să fie posibile cu aceste 30 de cuburi colorate în trei culori. De exemplu, poate fi format un cub colorat în întregime în roșu, cu condiția obișnuită ca fețele care se ating să fie de o aceeași culoare ?

MacMahon, care, pare-se, a inventat jocul cu cele 30 de cuburi, era maior în armata britanică și preda matematica la Academia militară regală. El este mai bine cunoscut prin cartea sa *Introduction to Combinatory Analysis* (Introducere în analiza combinatorie) și prin articolul dedicat aceluiași subiect în cea de-a unsprezecea ediție a Enciclopediei Britanice. A murit în 1928. Thomas O'Beirne mă informează că un joc format dintr-un set de cuburi cu opt culori, din care trebuie asamblat un cub mai mare respectând anumite condiții, se vindea pe vremuri în Anglia sub numele de Mayblox; pe cutia jocului, MacMahon era menționat ca inventator.

Un joc popular care se află în comerț, sub diferite nume, în mai multe țări, constă din patru cuburi, fiecare colorat în patru culori diferite. Problema constă în a le aranja în așa fel încât toate cele patru culori (indiferent de ordine) să apară pe fiecare față a prisme pătrată ce de 4×1 . Uneori, înlocui culorilor apar anumite simboluri, cum ar fi cele din patru culori de pe cărțile de joc sau reclame pentru

65

diferite produse. Pentru o descriere a acestor jocuri, puteți consulta cărțile *Diversions and Pastimes* (Distracții și treceri de vreme) de R. M. Abraham (Dover, 1964), p. 100 și *100 Puzzles* (100 de probleme) de Anthony Filipiak' (A. S. Barnes, 1942), p. 108. O analiză detaliată a acestui tip de probleme poate fi găsită în capitolul 7, *Cubismul și aranjarea culorilor*, din cartea lui O'Beirne *Puzzles and Paradoxes* (Enigme și paradoxuri), apărută la Oxford University Press în 1965.

RĂSPUNSURI

Trei metode de rezolvare a problemei pătratelor cu patru culori a lui MacMahon au fost date în ADAOS.

Descoperirea soluțiilor pentru problemele cu cuburi colorate este lăsată în seama cititorilor.

Pentru a demonstra că dreptunghiul de 3×8 nu poate fi format cu cele 24 de pătrate colorate, cu respectarea condițiilor puse, alegeți mai întâi patru pătrate oarecare, care au triunghiuri vecine de aceeași culoare, pentru cele patru colțuri. Rămân 14 pătrate, care poartă aceeași culoare — exact câte trebuie pentru cele 14 celule de margine ale dreptunghiului. Cel puțin trei dintre ele vor avea însă culoarea de margine pe laturi opuse — ceea ce cere trei pătrate interioare care să conțină aceeași culoare. Dar pătrate cu această culoare nu mai există, pentru că toate au fost deja folosite pentru margine. Așadar, dreptunghiul de 3×8 este imposibil de construit.

CAPITOLUL XVII

H. S. M. Coxeter

Foarte mulți dintre matematicienii profesioniști găsesc amuzant să facă din când în când incursiuni în domeniul matematicii recreative, cam tot așa cum le place să joace ocazional o partidă de șah ; este o formă de relaxare, pe care ei evită să o ia prea în serios. Pe de altă parte, mulți dintre creatorii ingenioși și bine informați de enigme posedă doar cunoștințe foarte elementare de matematică. H. S. M. Coxeter, profesor de matematică la Universitatea din Toronto (Canada) este una dintre acele rare personalități care excelează atât ca matematicieni cât și ca autorități în latura „mai puțin serioasă” a profesiei lor.

Harold Scott Macdonald Coxeter s-a născut la Londra, în 1907 și a studiat matematica la Trinity College, de la Universitatea din Cambridge. Pe linie „serioasă”, el este cunoscut ca autor al cărților *Non-Euclidean Geometry* (Geometria neeuclidiană), 1942, *Regular Polytopes* (Politope regulate), 1948, și *The Real Projective Plane* (Planul proiectiv real), 1955. Pe linie „ușoară”, el a editat și adus la zi lucrarea clasică a lui W. W. Rouse Ball *Mathematical Recreations and Essays* (Recreații și eseuri matematice) și a scris zeci de articole de matematică recreativă la diferite reviste. În 1961, editura „John Wiley & Sons” a publicat cartea sa *Introduction to Geometry* (Introducere în geometrie), care constituie obiectul acestui capitol.

Cartea aceasta este remarcabilă din mai multe puncte de vedere. Mai presus de toate, domeniul ei este extrem de variat. Cartea trece prin mai toate capitolele geometriei, inclusiv geometria neeuclidiană, cristalografia, teoria grupurilor, teoria rețelelor, geo

65

dezicele, vectorii, geometria proiectivă și cea afină, topologia — subiecte care de obicei nu pot fi întâlnite în cărți introductive. Stilul cărții este clar și sugestiv, deși în mare parte tehnic. El cere o citire înceată și atentă, dar are meritul de a permite comprimarea unei mari cantități de material într-un volum relativ redus. Cartea este de la un capăt la altul impregnată de simțul de umor al autorului, de dragostea sa pentru frumusețile matematicii și de entuziasmul său pentru joc. Cele mai multe dintre capitole se deschid prin citate literare foarte adecvate (multe din Lewis Carroll) și se încheie cu exerciții, care deseori sînt noi și interesante enigme. Cîteva dintre capitole sînt în întregime dedicate unor probleme sau subiecte de înalt interes recreațional, dintre care unele au fost luate în discuție, la un nivel ceva mai elementar, în volumul de față și în cel care l-a precedat: raportul de aur, corpurile geometrice regulate, curiozități topologice, colorarea hărților, împachetarea sferelor, și altele. Fragmente de informație lăaturalnică, extrem de amuzante, punctează textul. Cîți dintre cititori știu, spre exemplu, că în 1957 compania „B. F. Goodrich” a obținut un patent pentru banda Moebius ? Acest patent, purtînd numărul 2 784 834, se referă la o bandă de cauciuc trecută peste două roți, folosită la transportul substanțelor fierbinți sau abrazive. Atunci cînd bandei i se dă familiara jumătate de răsucire, ea se uzează în mod egal pe ambele fețe — sau, mai corect, pe singura sa față.

Sau, cîți cititori știu că la Universitatea din Göttingen există o cutie enormă în care se află un manuscris care arată cum se poate construi, numai cu rigla și compasul, un poligon regulat cu 65 537 de laturi ? Un poligon cu

un număr de laturi exprimat printr-un număr prim poate fi construit după procedeul obișnuit numai dacă numărul este un număr prim de un tip special, numit număr prim Fermat — un număr prim care poate fi exprimat sub forma $2(2^n)-1$. Numai cinci astfel de numere prime sînt cunoscute : 3, 5, 17, 257 și 65 537. Sărml. uul om care a reușit să construiască 65 537-gonul, ne spune Coxeter, și-a pierdut zece ani la această treabă. Nimeni nu știe dacă există (sau nu) vreun poligon cu un număr prim de laturi mai mare decît acesta, care să fie în principiu, construibil cu rigla și compasul. Dacă un asemenea poligon există, construcția lui ar fi în afara discuției, deoarece numărul laturilor sale ar fi exprimat printr-o cifră astronomică. S-ar putea spune că banalul triunghi, atît de minuțios studiat de matematicienii antici, n-ar mai putea oferi nici o surpriză. Cu toate acestea, multe teoreme remarcabile referitoare la triunghi — teoreme care nu figurează la Euclid, deși acesta le-ar fi putut descoperi cu

66

Fig. 102 Teorema lui Morley.

Fig. 103 Problema bisectoarelor interne.

ușurință — au fost găsite doar foarte recent. Un exemplu grăitor în acest sens, discutat de Coxeter, este teorema lui Morley. Aceasta a fost descoperită prin anul 1899 de Frank Morley, profesor de matematică la Universitatea John Hopkins (Baltimore, Maryland), tatăl scriitorului Christopher Morley (1890-1957). Coxeter scrie că teorema s-a răspîndit rapid printre matematicieni, sub formă de zvon mărunț, dar prima demonstrație a fost publicată abia în 1914. Poate că acesta este cel mai bun exemplu ilustrativ pentru acele „bunuri umane pe care nu le consumi atunci cînd te bucuri cel mai mult de ele”, despre care vorbeau Paul și Percival Goodman în capitolul 5 al cărțuții lor *Communitas* (Societatea).

Teorema lui Morley este ilustrată în fig. 102. Se desenează un triunghi de o formă oarecare și i se trisectează unghiurile. Liniile trisec-toare se înfîlesc totdeauna, două cîte două, în vîrfurile unui triunghi echilateral. Ceea ce este cu totul surprinzător în această teoremă este tocmai apariția acestui mic triunghi echilateral, numit triunghiul lui Morley. Profesorul Morley a scris mai multe manuale și a efectuat lucrări importante în multe domenii — dar celebritatea și-a cucerit-o numai datorită acestei teoreme. De ce nu a fost ea descoperită mai devreme ? Coxeter crede că probabil matematicienii, știind că unghiul nu poate fi trisecat în condițiile clasice, s-au ferit de teoremele care implicau trisectarea unghiurilor.

O altă teoremă asupra triunghiurilor care și-a cîștigat o largă popularitate în secolul nostru este ilustrată în fig. 103. Dacă bisectoarele unghiurilor interioare de la baza unui triunghi sînt egale,

66

pare de la sine înțeles că triunghiul trebuie să fie isoscel. Dar ați putea demonstra aceasta? Nici o altă problemă de geometrie elementară nu este mai subtil înșelătoare. Reciproca ei — bisectoarele unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel sînt egale — datează încă de pe vremea lui Euclid și este foarte ușor de demonstrat. Teorema despre care vorbim pare la fel de ușor de demonstrat, dar de fapt este extrem de grea. Ea fiecare cîteva luni primesc o scrisoare în care cineva pretinde că a găsit o demonstrație. De obicei, răspund citînd un articol al lui Archibald Henderson, care a apărut în numărul din decembrie 1937 al revistei „Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society”. Henderson își intitulează articolul, care are aproape 40 de pagini, Un eseu asupra problemei bisectoarelor interioare, menit să pună capăt tuturor eseurilor asupra problemei bisectoarelor interioare. El subliniază că multe dintre demonstrațiile publicate — unele aparținînd unor matematicieni celebri — sînt greșite ; apoi dă zece demonstrații corecte, toate foarte lungi și complicate. Este o surpriză foarte plăcută să găsim în cartea lui Coxeter o demonstrație nouă atît de simplă, încît autorul ei nu are nevoie decît de o sugestie pe patru rînduri din care demonstrația se obține pe loc.

Din cînd în cînd, atunci cînd cineva descoperă o teoremă nouă și elegantă, el este tentat să o pună în versuri. Un exemplu modern și amuzant este Sărutul precis, o poezie a distinsului chimist Frederick Soddy¹, cel care a introdus în știință cuvîntul „izotop”. Dacă trei cercuri de dimensiuni oarecare sînt astfel așezate încît fiecare dintre ele să fie tangent la celelalte două, este întotdeauna posibil să se deseneze un al patrulea cerc care este tangent la primele trei. În mod obișnuit, există două moduri de a desena acest al patrulea cerc, așa cum se arată prin linii punctate în fig. 104. Care este relația dintre razele acestor patru cercuri? Soddy, folosind un procedeu despre care a mărturisit mai tîrziu că nu l-a înțeles niciodată, a nimerit peste următoarea formulă foarte simetrică, foarte elegantă în care a, b, c, și d sînt inversele celor patru raze:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = i(a + b + c + d)^2.$$

Inversul unui număr n este, pur și simplu, iar inversa unei fracții se obține răsturnînd fracția respectivă. Inversul razei este o măsură a curburii cercului. O curbă concavă — cum este cea a cercului care le cuprinde pe celelalte trei — este considerată o curbu-

¹ Chimist englez, laureat al Premiului Nobel în 1921 (1877-1956). - N.T.

66

Fig. 104 Sărutul precis al lui Frederick Soddy.

ră negativă și în calcule ea intră ca un număr negativ. O linie dreaptă are curbura nulă. Coxeter citează astfel cea de-a doua strofă a poeziei:

Patru cercuri vin la sărutat, Cel mai mic este cel mai curbat. Curbura este luată pentru Inversul distanței de la

centru. Pătratele celor patru cuburi adunate dau din pătratul sumei lor, jumate.

Formula lui Soddy economisește creatorilor de jocuri amuzante foarte mult timp; problemele care implică cercuri care se „sărută”, des întâlnite în lucrările rebusiste, sînt foarte greu de rezolvat fără

67

ajutorul ei. De exemplu, dacă cele trei cercuri desenate prin linii pline în fig. 104 au razele de 1, 2 și 3 cm, care sînt razele cercurilor desenate prin linii punctate? Răspunsul poate fi desigur dat desenînd un mare număr de triunghiuri dreptunghice și aplicînd gospodărește teorema lui Pitagora — dar formula lui Soddy dă o simplă ecuație de gradul doi, care are două rădăcini — inversele celor două raze căutate. Rădăcina pozitivă dă pentru curbura cercului mic valoarea $23/6$, prin urmare raza acestuia este de $6/23$ cm; rădăcina negativă dă pentru cercul mare o curbură negativă de $-1/6$ și o rază de 6 cm.

Cei care doresc să verifice calitățile formulei pe alte cazuri, pot lua în considerație următoarea situație. Pe un plan se desenează o linie dreaptă. Două sfere „care se sărută”, una cu raza de 4 cm și cealaltă cu raza de 9 cm, sînt așezate pe dreaptă. Care este raza celei mai mari sfere care poate fi așezată pe aceeași dreaptă și le „sărută” pe primele două? În locul formulei lui Soddy, se poate folosi următoarea expresie echivalentă, dată de Coxeter, care face calculul mult mai ușor. Date fiind trei numere inverse a , b , și c al patrulea număr invers va fi $d = a^{-1}b^{-1}c^{-1} \pm 2\sqrt{abc + bc + ac}$.

În bogat ilustrata carte a lui Coxeter, desene din cele mai interesante, chiar și din punct de vedere artistic, însoțesc capitolele dedicate simetriei și rolului jucat de teoria grupurilor în construirea modelelor care se repetă — cum sînt desenele decorative de pe zugrăveli: tapete, mozaicuri, stofe de mobilă etc. „Matematicianul, ca și pictorul sau poetul, este un creator de modele”, scria matematicianul englez G. H. Hardy într-un celebru articol, citat de Coxeter. „Și dacă modelele sale sînt mai trainice decît ale lor, aceasta este pentru că sînt construite din idei”. Cînd se asamblează poligoane în așa fel încît ele să acopere planul, fără goluri sau acoperiri, modelul rezultat poartă numele de mozaicare. O mozaicare regulată este cea obținută exclusiv din poligoane regulate, toate identice și în contact colț la colț (nu colț la latură). Există numai trei astfel de mozaicari: o rețea de triunghiuri echilaterale, rețeaua cu pătrate a mesei de șah, și rețeaua hexagonală a fagurelui de albine, a gardurilor de sîrmă sau a unor pardoseli de mozaic. Cu triunghiuri și pătrate se poate umple un plan și fără a așeza piesele colț la colț, dar acest lucru nu se poate face cu hexagoane.

Mozaicările „semiregulate” sînt acelea în care cele rezultate din asamblarea colț la colț a două sau mai multe feluri de poligoane regulate, în așa fel încît în jurul fiecărui vertex să fie aceleași poligoane

67

și în aceeași ordine ciclică. Există exact opt mozaicari de acest gen, construite din diferite combinații de triunghiuri, pătrate, hexagoane, octogoane și dodecagoane (vezi fig. 105). Toate ar putea constitui — unele chiar constituie — excelente modele pentru pardoseli. Toate rămîn neschimbate prin reflexie în oglindă, în afară de mozaicul din colțul din dreapta jos, care a fost descris încă de Johannes Kepler. Acesta are două forme — una fiind imaginea în oglindă a celeilalte. O trecere de timp foarte plăcută constă în a tăia din carton un număr mare de poligoane de dimensiunile și formele potrivite, a le colora în diferite culori și a încerca toate aceste modele. Dacă se ridică restricția privind colțurile, din aceleași poligoane se pot forma o varietate infinită de mozaicuri. (Cîteva exemple pregnante de asemenea mozaicari neregulate, dar simetrice, sînt reproduse în cartea lui Hugo Steinhaus *Mathematical Snapshots*.)

Toate mozaicările care acoperă planul cu un model repetat, aparțin unui set de 17 grupuri de simetrie diferite, care epuizează toate modalitățile fundamentale diferite în care modelele pot fi repetate la nesfîrșit în două dimensiuni. Elementele acestor grupuri sînt pur și simplu operații efectuate asupra unui model de bază: translația acestuia în plan, rotația sau reflexia într-o oglindă. Cele 17 grupuri de simetrie au o importanță deosebită în studiul structurii cristalelor; Coxeter precizează că cel care a demonstrat pentru prima dată că numărul acestor grupuri este de 17, a fost cristalograful rus E.S. Fedorov, în 1891. „Arta acoperirii unui plan cu un model repetat, scrie Coxeter, și-a atins apogeul în Spania secolului al XIII-lea, unde maurii au folosit toate cele 17 grupuri în complicatele decorații ale Alhambrei. Preferința lor pentru desenele abstracte se datorează respectării stricte a celei de-a doua Porunci; „Să nu-ți faci tie chip cioplit!”

Bineînțeles, configurațiile constitutive fundamentale ale modelelor de acest fel sînt limitate, cu necesitate, la forme abstracte. Coxeter ia în discuție modul ingenios în care artistul olandez Maurits C. Escher, care trăiește acum la Baarn, a aplicat multe dintre cele 17 grupuri de simetrie la mozaicuri în care drept regiuni fundamentale sînt folosite formele de animale. Unul dintre uimitoarele mozaicuri ale lui Escher, reprodus în cartea lui Coxeter, reprezintă un cavaler pe calul său (fig. 106); un altul este arătat în fig. 107. După cum observă Coxeter, la prima vedere, modelul cavalerului pare să fie rezultatul translației unei configurații de bază de-a lungul unor axe verticale și orizontale: dar, la o examinare mai atentă, se constată că și fondul este construit din aceeași configurație de bază. Grupul de simetrie pentru acest model este, de fapt, generat de așa-numitele „reflexii alunecate” — o translație a configurației însoțită de o inver-

67

Fig. 106 Unul dintre mozaicurile matematice ale lui Maurits Escher.

sare a acesteia prin reflexie în oglindă. Riguros vorbind, aceasta nu este o mozaicare, deoarece regiunea

constitutivă de bază nu este un poligon. Modelul aparține unei clase curioase de mozaicuri, în care forme neregulate, dar toate identice, se întretes, umplînd planul. Nu este greu de găsit forme abstracte de acest gen, dar atunci cînd se pune problema ca ele să semene cu ceva, lucrurile se complică enorm.

Escher este un pictor căruia îi place să se joace cu structuri matematice. Există o respectabilă școală estetică, al cărei crez este „arta

68

Fig. 107 Un alt mozaic al lui Escher. El a fost tipărit în culori pe coperta numărului din aprilie 1961 al revistei „Scientific American”.

— o formă de joc”, și o la fel de „respectabilă școală matematică ce consideră toate sistemele matematice drept niște jocuri fără-sens, jucate cu anumite simboluri și în concordanță cu reguli dinainte stabilite. Este oare și știința însăși tot’un fel de joc? în legătură cu această problemă, Coxeter citează următoarele rînduri ale fizicianului teoretician irlandez John Eighton Syngé:

„Se poate oare ca toți marii oameni de știință din trecut să fi jucat un joc — un joc ale cărui reguli sînt scrise nu de oameni, ci de Dumnezeu?... Atunci cînd ne jucăm, nu ne întrebăm de ce ne jucăm.

68

ci pur și simplu ne jucăm³. Jocul nu servește nici un cod moral, în afară de acel ciudat cod care, pentru motive necunoscute, se impune de la sine asupra jocului însuși... Am căuta în zadar prin literatura științifică vreo intenție de motivare. Cît despre straniu cod moral pe care îl respectă oamenii de știință, ce poate fi mai straniu decît un ideal abstract al adevărului într-o lume plină de ascunzișuri, dezamăgiri și tabuuri?... Supunîndu-vă atenției ideea că mintea omenească se află în largul ei doar atunci cînd se joacă, mă joc eu însumi, și aceasta mă face să cred că ceea ce spun poate avea un element de adevăr”.

Acest pasaj aduce mult cu stilul caracteristic al scrierilor lui Coxeter însuși. Este unul din motivele pentru care cartea sa este de fapt o comoară pentru studenții în matematică, ale căror minți vibrează pe aceeași lungime de undă.

ADAOS

Compania „Goodrich” nu a fost prima care a brevetat o instalație bazată pe banda Moebius. Ea 16 ianuarie 1923, Lee De Forest⁴ a obținut brevetul nr. 1442682 pentru o peliculă cinematografică fără sfîrșit, de tip Moebius, pe care sunetul putea fi înregistrat pe ambele fețe, iar la 23 august 1949, Owen D. Harris a obținut brevetul nr. 2479929 pentru o curea abrazivă în formă de bandă Moebius. A mbele patente mi-au fost aduse la cunoștință de cititori. S-ar putea să mai fie și altele.

Există o foarte bogată literatură asupra triunghiului lui Morley. Demonstrația lui Coxeter apare la p. 23 a cărții sale, care poate fi consultată pentru referințele mai vechi. O discuție completă a triunghiului, împreună cu alte triunghiuri echilaterale care mai intervin (de exemplu, prin trisectarea unghiurilor exterioare), se face într-un articol al lui W. J. Dobbs din „Mathematical Gazette”, februarie 1938. Teorema este discutată și de H. F. Baker, în cartea sa *Introduction to Plane Geometry* (Introducere în geometria plană), 1943, pp. 345 — 349. De la data apariției cărții lui Coxeter, demonstrații simple au mai fost date de Leon Bankoff (în „Mathematics Magazine”, septembrie — octombrie 1962, pp.223—224) și Haim Rose (în „American Mathematical Monthly”, august—septembrie 1964, pp. 771—773).

68

Problema bisectoarelor interioare, cunoscută și ca teorema lui Steiner-Lehmus, are o literatură și mai bogată încă decît cea a triunghiului lui Morley. Teorema a fost propusă în 1840 de C. E. Ehmus și demonstrată pentru prima dată de Jacob Steiner⁵. Pentru fascinanta sa istorie, ca și pentru mai multe soluții, se poate consulta articolul lui J. A. McBride din „Edinburgh Mathematical Notes”, voi. 33, pp. 1 — 13, 1943, precum și articolele lui Archibald Henderson intitulate *Privire de ansamblu asupra problemei Lehmus-Steiner-Terquem*, apărute în „Scripta Mathematica”, voi. 21, pp. 223—312, 1955, și voi. 22, pp. 81—84, 1956. Demonstrația poate fi găsită și în mai multe manuale de geometrie : E- S. Shively, *An Introduction to Modern Geometry* (Introducere în geometria plană), p. 141 ; David R. Davis, *Modern College Geometry* (Manual de geometrie modernă), p. 61; Nathan Altshiller Court, *College Geometry* (Manual de Geometrie), p. 65. O demonstrație extrem de scurtă, dată de G. Gilbert și D. MacDonnell, a apărut în „American Mathematical Monthly”, voi. 70, p. 79, 1963. Poezia lui Soddy Sărutul precis poate fi găsită în întregime în antologia distractivă a lui Clifton Fadiman, *The Mathematical Magpie* (Gîlceava matematică), ed. „Simon and Schuster”, 1962, p. 284. Ultima strofă a poeziei generalizează teorema pentru sfere. O a patra strofă, generalizînd pentru hipersfere cu n dimensiuni, a fost scrisă mai tîrziu de Thorolâ Gosset și publicată în revista „Nature”, numărul din 9 ianuarie 1937; ea poate fi găsită și în cartea lui Fadiman, la p. 285.

Cea de-a patra mozaicare semiregulată din fig. 105 (numărînd de la stînga spre dreapta) constituie baza unui tablou al lui Salvador Dali⁶, pe care autorul îl numește „Cincizeci de tablouri abstracte, care, văzute de la doi iarzi distanță, se transformă în trei europeni bărboși travestiți în chinezi, iar privite de la șase iarzi, seamănă cu un cap de tigru regal”. O reproducere în alb și negru a tabloului a apărut în numărul din 6 decembrie 1963 al revistei „Time”, la p. 90.

în fig. 108 este reprodus un alt mozaic remarcabil al lui Escher — o litografie din 1942, intitulată „Verbum”,

Escher o descria ca o istorie picturală a creației. „Din nebuloasa cenușie din centrul tabloului («Ea început a fost Cuvîntul») ies figuri triunghiulare. Cu cît ele se îndepărtează de centru, cu atît contrastul dintre lumină și întuneric devine mai net, iar contururile, la început drepte, devin unduite și zimțate. Alternativ, albul devine fond pentru obiectele negre, iar negrul, pentru obiectele albe. În apropierea marginilor, figurile se

69

Fig. 108 Verbum, de Escher (litografie, 1942). Din colecția lui Cornelius Van S. Roosevelt, Washington. transformă în păsări, pești, broaște — fiecare specie în elementul său specific, cerul, apa și pămîntul. În același timp, există transformări gradate din pasăre în pește, din pește în broască și din broască din nou în pasăre. Există de asemenea o mișcare perceptibilă, în sensul acelor unui ceasornic". (Citatul este extras din lucrarea The Graphic Work of M: C. Escher, publicată la Londra de Oldbourne Press, 1961.)

69

Fig. 109 Răspuns la problema sferelor „care se sărută".

Litografia a fost reprodusă de Melvin Calvin în articolul său Evoluția chimică din lucrarea Interstellar Communication (Comunicațiile interplanetare), apărută sub îngrijirea lui A. G. W. Cameron (Benjamin, 1963) ; Calvin spune că a văzut-o pentru prima oară afîrnată pe peretele unei farmacii din Olanda.

Pentru alte detalii asupra artei matematice a lui Escher, se poate consulta articolul meu din numărul din aprilie 1966 al revistei „Scientific American" și referințele citate acolo.

RĂSPUNSURI

Cititorilor li s-a cerut să găsească raza celei mai mari sfere care poate fi plasată pe o linie dreaptă (desenată într-un plan), în așa fel încît să fie tangentă la două sfere care se ating și care sînt de asemenea situate pe dreaptă, avînd razele de 4 cm și de 9 cm. Privită în secțiune, ca în fig. 109, problema se reduce la găsirea a patru cercuri reciproc tangente — linia dreaptă fiind considerată un cerc cu curbura zero. Formula din Sărutul precis, poezia lui Frederick Soddy, dă pentru razele celor două cercuri desenate cu linii punctate valorile 36/25 cm și 36 cm. Cercul mai mare este de fapt o secțiune mediană a sferei care este cerută în problemă.

CAPITOLUL XVIII

Jocul lui Gale și alte jocuri

Nicăieri omul nu a dovedit mai multă inventivitate decît în jocurile sale. Leibniz, într-o scrisoare către Pascal Jocurile matematice ca ticktacktoe, dame, șah sau gol sînt întreceri între doi parteneri, care 1) trebuie să se termine după un număr finit de mișcări, 2) nu conțin nici un element întîmplător introdus de instrumente cum sînt zarurile, cărțile etc. și 3) sînt astfel jucate încît fiecare dintre parteneri poate vedea toate mișcărilor. Dacă un joc se încadrează în aceste condiții, iar jucătorii joacă „rațional" — adică după strategia cea mai bună — atunci rezultatul jocului este predeterminat. Acesta va fi sau remiză, sau cîștig pentru cel care face prima mișcare, sau pentru cel care face cea de-a doua mișcare, în acest capitol vom face cunoștință mai întîi cu două jocuri simple pentru care strategiile de cîștig sînt cunoscute, apoi cu un popular joc de masă pentru care strategia de cîștig tocmai a fost descoperită și, în cele din urmă, cu o clasă de jocuri de masă care nu au fost încă analizate.

Multe dintre jocurile mai simple în care piesele sînt plasate sau îndepărtate de pe o tablă se pretează la așa-numita strategie de simetrie. Un exemplu clasic este jocul în care doi parteneri plasează pe rînd cîte o piesă de domino oriunde pe o masă dreptunghiulară. Fiecare piesă trebuie așezată orizontal între limitele dreptunghiului și fără a deplasa nici una dintre piesele așezate anterior. Se presupune că există destule piese ca tabla să poată fi complet acoperită, cînd piesele sînt puse latură lîngă latură. Jucătorul care poate plasa ultima piesă

69

cîștigă. Jocul nu poate sfîrși prin remiză, așa că dacă ambele părți joacă rațional, care dintre ele poate fi sigură de victorie ? Răspunsul este : jucătorul care plasează prima piesă. Strategia sa constă în a plasa această primă piesă exact în centrul tablei (ca în fig. 110), și în a imita apoi adversarul, plasînd piesa în poziția opus-simetric. Este evident că ori de cîte ori al doilea jucător găsește un petic de tablă liber, primul va găsi și el un loc liber pe care se poate juca.

Aceași strategie se aplică la orice tip de piesă plată care își păstrează conturul dacă i se dă o rotație de 180 de grade. De exemplu, strategia rămîne valabilă dacă piesele sînt în formă de cruci grecești², dar nu va funcționa dacă acestea au, de pildă, forma literei T. Va funcționa, oare, dacă drept piese se folosesc trabucuri ? Da, dar din cauză că extremitățile trabucului au contururi diferite, primul trabuc trebuie plasat „în picioare" pe extremitatea lui plată! Nu este greu de inventat noi jocuri de acest gen, în care piese de diferite forme sînt alternativ plasate pe table cu tot felul de profiluri, după anumite reguli. În anumite cazuri, există strategii care asigură victoria pentru primul sau pentru cel de-al doilea jucător; în alte cazuri, astfel de strategii nu există.

Un alt tip de joc simetric asigură victoria în următorul joc. Pe masă sînt aranjate în cerc un număr oarecare de monede, în așa fel încît fiecare să se atingă cu cele două vecine. Jucătorii ridică pe rînd fie o monedă, fie două care se ating. Cel care ridică ultima monedă, cîștigă. În acest caz, cel care poate să cîștige fără greș este jucătorul care

Fig. 110 Un joc de masă cu dominouri.

69

joacă primul. După ce primul jucător a ridicat una sau două monede, monedele rămase formează un lanț curbat cu două capete. Dacă lanțul conține un număr impar de monede, jucătorul care face cea de-a doua mișcare ridică moneda din mijloc. Dacă numărul monedelor din lanț este par, el ridică cele două monede centrale. În ambele cazuri, el lasă pe tablă două lanțuri separate de monede de lungime egală. De aici înainte, oricâte monede ar ridica adversarul său dintr-un lanț, el îi copiază mișcarea, ridicând una sau două monede din celălalt.

Atât strategia aceasta, cât și cea de mai înainte, sînt exemple a ceea ce teoreticienii jocurilor numesc o strategie „de perechi” : o strategie în care „mutările” celor doi parteneri sînt grupate în perechi (care nu trebuie neapărat să fie simetrice). Strategia cea mai bună constă în a juca o mutare a unei perechi ori de cîte ori adversarul joacă cealaltă mutare. Un exemplu foarte interesant de strategie de perechi este oferit de jocul topologic al lui Gale (sau Bridg-it), pus pe piață în 1960 și devenit între timp extrem de popular printre copii. Jocul a fost prezentat în numărul din octombrie 1958 al revistei „Scientific American” și el se datorește lui David Gale, matematician la Universitatea Brown (Providence, Rhode Island).

Tabla jocului este ilustrată în fig. 111. Dacă se joacă pe hîrtie, unul dintre jucători desenează cu un creion negru cîte o linie dreaptă, care unește o pereche oarecare de puncte negre vecine, orizontal sau vertical, dar nu diagonal. Celălalt jucător folosește un creion roșu pentru a uni în mod similar perechi de puncte roșii. Ei trasează pe rînd cîte o linie, cu condiția ca acestea să nu se întretaie. Cîștiga cel care reușește să completeze un drum continuu care unește cele două laturi opuse ale tablei care sînt de culoarea lui. (Jocul comercial are punctele pe tablă sub formă de ridicături, între care se pot plasa mici „punți” sau „bariere” din material plastic.) Se știe de mulți ani că există o strategie de cîștig pentru jucătorul care face prima mutare, dar abia recent această strategie a fost descoperită.

Cel care a „stricat” jocul a fost Oliver Gross, un expert în jocuri de la „Rand Corporation”, departamentul de matematică. Cînd am aflat despre descoperire, i-am scris imediat ca să-i cer detalii, așteptîndu-mă să primesc o lungă și complicată analiză care s-ar fi putut dovedi prea tehnică pentru această carte. Spre mirarea mea, toată explicația se reducea, pur și simplu, la diagrama din fig. 112 și la următoarele două fraze: faceți prima mișcare cum se arată prin linia neagră din colțul din stînga-jos a diagramei; apoi, ori de cîte ori mișcarea adversarului trece peste capătul uneia dintre liniile punctate, jucați trecînd peste celălalt capăt al aceleiași linii. Această ingenioasă strategie de perechi garantează victoria pentru primul jucător, deși nu în mod necesar în numărul minim de mișcări. Gross spune

70

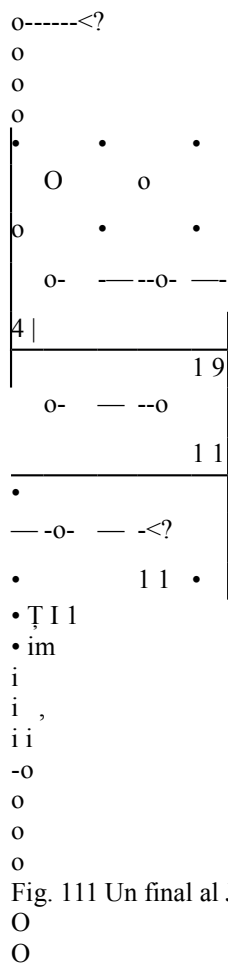


Fig. 111 Un final al Jocului lui Gale. Negrul a pierdut.

O
O

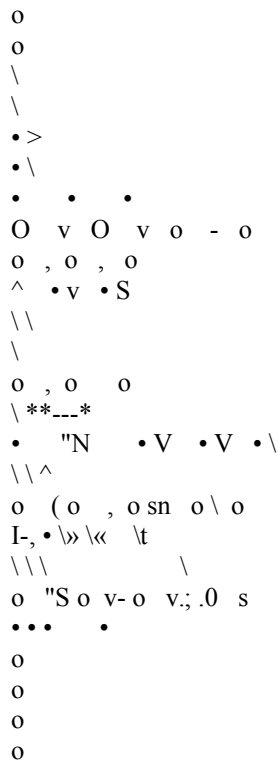


Fig. 112 Strategia „de perechi” a lui Oliver Gross, pentru câștigarea Jocului lui Gale. despre strategia sa că este „democratică”, în sensul că „ea joacă prosteste contra unui jucător prost și inteligent contra unui jucător inteligent, dar duce la victorie în toate cazurile”. Aceasta nu este singura strategie de perechi descoperită de Gross, dar el a reținut-o pe aceasta din cauza regularității ei și ușurinței cu care poate fi extinsă la o tablă de orice dimensiune.

Observați că pe diagramă nu sînt indicate mișcări de-a lungul laturilor tablei. Astfel de mișcări sînt admise de regulile jocului, dar ele nu contribuie cu nimic la victorie. Dacă în cursul jocului adversarul încearcă să vă deruteze, făcînd mișcări de-a lungul laturilor, puteți răspunde tot prin mișcări de-a lungul laturilor. Sau, dacă preferați, puteți juca oriunde pe tablă. Dacă la un moment ulterior al jocului această mișcare făcută la întîmplare este cerută de strategie, pur și simplu faceți mișcarea la care aveți dreptul în altă parte. A avea o mișcare în plus pe tablă este uneori un avantaj, dar niciodată un dezavantaj. Bineînțeles, acum, cînd există o strategie de câștig, jocul lui Gale nu mai prezintă interes, exceptînd pe jucătorii la care vestea nu a ajuns încă.

Multe jocuri de masă cu reguli relativ simple au rezistat însă tuturor încercărilor de analiză matematică. Un exemplu îl constituie familia de jocuri derivate din halma, un joc larg răspîndit în Anglia pe la sfîrșitul secolului trecut. „Modul de viață normal al englezului, scria George Bernard Shaw în 1898, constă în a sta în familii separate în camere separate în case separate, fiecare om ocupat în tăcere cu o carte, cu un ziar, cu un joc de halma. . .”

În forma sa inițială, jocul (a cărui denumire provine delacuvîntul grecesc care înseamnă „săritură”) se juca pe o masă de dame cu 16 pătrate pe fiecare latură, dar foarte curînd el a fost extins la mese de toate formele și dimensiunile. Jocul cunoscut astăzi sub numele de „dame chinezești” nu este altceva decît una dintre variantele tîrzii ale halmei. Voi explica aici numai o variantă simplificată, care poate fi jucată pe masa obișnuită de șah de 8 X 8 și care conduce la o interesantă „pasiență” solitară, încă nerezolvată.

Inițial piesele sînt în poziția obișnuită pentru începutul jocului de dame. Mișcările sînt aceleași ca la dame, cu următoarele excepții:

1. Piesele peste care se sare nu sînt îndepărtate de pe masă.
2. O piesă poate sări peste alte piese de orice culoare.
3. Mișcările și săriturile înapoi sînt admise.

Se poate face un șir de sărituri neîntrerupte peste piese de ambele culori, dar nu se admite combinarea unei sărituri cu o mișcare peste un singur cîmp. Scopul jocului este ca fiecare jucător să ocupe poziția inițială a celuilalt. Primul care reușește este câștigător. Jocul poate

71

fi câștigat și prin aducerea adversarului într-o situație în care acesta nu mai poate face nici o mișcare. /

O oarecare idee despre dificultățile care intervin în analiza jocurilor de tip halma vă puteți face încercînd următoarea problemă. Aranjați 12 piese de dame în pozițiile obișnuite de începere a jocului, pe pătratele negre ale primelor trei rînduri ale tablei. Restul tablei este goală. În cît de puține mișcări de tip halma puteți transporta

aceste piese pe ultimele trei rînduri ale laturii opuse? Prin „mişcare” se înțelege fie o mutare diagonală ca la dame, înainte sau înapoi, către un câmp vecin negru, fie un salt peste una sau mai multe piese. Un salt neîntrerupt poate include sărituri înainte și înapoi și contează ca o singură mișcare. Ca și la jocul de halma, nu este obligatoriu ca un salt să fie executat atunci cînd el poate fi făcut, iar o serie de salturi neîntrerupte poate fi terminată oricînd doriți, chiar dacă mai sînt posibile și alte salturi.

Pentru comoditate în înregistrarea soluției, numerotați câmpurile negre, de la stînga spre dreapta și de sus în jos, cu cifre de la 1 la 32.

ADAOS

După ce soluția cu 20 de mișcări pentru problema de dame a fost publicată, mai mulți cititori mi-au trimis demonstrații că sînt necesare cel puțin 18. Unul dintre ei, Vern Poj'thress, din Fresno (California), a trimis o demonstrație pentru 20 de mișcări ca minimum — din păcate prea lungă și complicată pentru a fi reprodușă aici. Așa cum am menționat și în volumul Amuzamente matematice la p. 231, jocul lui Gale este identic cu un joc de „interschimbare” numit Colivia, care a fost inventat de Claude E. Shannon. Jocul lui Shannon este descris în una din nuvelele lui Arthur Clarke, Pacifistul, retipărită în antologia menționată a lui Clifton Fadiman (pp. 37—47) ; o descriere a jocului mai este dată și în articolul Pași către o inteligență artificială al lui Marvin Minsky, în „Proceedings of the Institute of Radio Engineers”, voi. 49, 1961, p. 23. În afară de varianta jocului lui Gale pusă în circulație sub numele de Bridg-it, pe piață a mai apărut și o variantă mai complicată, sub numele de Twixt. Independent de Gross, o strategie de cîștig pentru jocul lui Gale a fost descoperită de Alfred Eehman, de la Centrul de cercetări matematice al armatei S.U.A., în cadrul Universității din Wisconsin. Eehman a găsit o strategie generală pentru o clasă largă de jocuri de scurtcircuitare de tip Shannon. Eehman mi-a scris că a început lucrul prin 1959, dar rezultatele nu au fost publicate, deși un rezumat al lor a fost trimis lui Shannon. În aprilie 1961, Eehman a vorbit despre lucrare în cadrul unei întîlniri a Asociației americane de matematică,

72

un rezumat al ei apărînd în dările de seamă pe luna iunie ale asociației. Articolul 0 soluție pentru jocul de scurtcircuitare al lui Shannon a apărut în „Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics”, voi. 12, nr. 4, decembrie 1964, pp. 587—725. Strategia lui Lehman aproape că dă o strategie de cîștig și pentru Hex, un binecunoscut joc topologic similar cu jocul lui Gale — însă Hex s-a strecurat prin analiză și a rămas în ultimă instanță nerezolvat.

În 1961, Gunter Wenzel a scris un program pentru jocul lui Gale, pentru calculatorul IBM 1401, bazat pe strategia propusă de Gross. O fotocopie a programului a fost difuzată de Institutul de cercetări de sisteme IBM din New York, iar în martie 1963 a fost publicat în revista germană „Burotechnik und Automation”.

RĂSPUNSURI

Problema mutării celor 12 piese de dame de pe o parte a tablei pe cealaltă, folosind mișcări de tip halma, a provocat un răspuns masiv din partea cititorilor. Mai mult de 30 de cititori au rezolvat problema în 23 de mutări, 49 au rezolvat-o în 22 de mutări, 31 în 21 de mutări și 14 în 20 de mutări.

Nu am primit nici o demonstrație cum că 20 ar fi numărul minim de mutări, deși mulți cititori au indicat o cale simplă prin care se poate arăta că cel puțin 16 mutări sînt necesare. La începutul jocului opt piese se găsesc pe rîndurile impare 1 și 3 și patru piese pe rîndul par 2. La sfîrșit, opt piese se vor găsi pe rîndurile pare 6 și 8 și patru pe rîndul impar 7. În mod clar, patru piese trebuie să-și schimbe paritatea de la impar la par. Acest lucru poate fi făcut numai dacă fiecare dintre cele patru piese execută cel puțin o mișcare în săritură și o mișcare alunecată, ceea ce ridică numărul total al mutărilor la 16.

Este totuși greu de conceput ca piesele să poată fi transportate în mai puțin de 20 de mutări, deși trebuie să mărturisesc că atunci cînd am prezentat problema mi-a fost la fel de greu de conceput că 20 de mutări ar fi de ajuns. Presupunînd că pătratele negre sînt numerotate de la 1 la 32, de la stînga spre dreapta și de sus în jos, cu un pătrat alb în colțul de stînga sus al tablei, soluția dată de Edward J. Sheldon, primul dintre cei 14 cititori care mi-au trimis soluții cu 20 de mutări, se prezintă în felul următor:

- | | | |
|----------|-----|-------|
| 1. 21-17 | 7. | 17- 1 |
| 2. 30-14 | 8. | 31-15 |
| 3. 25- 9 | 9. | 26-10 |
| 4. 29-25 | 10. | 28-19 |
| 5. 25-18 | 11. | 14- 5 |
| 6. 22- 6 | 12. | 23- 7 |

72

Fig. 113. Poziția pieselor de dame după zece mutări.

13. 18- 2
14. 32-16
15. 27-11
16. 15- 8
17. 8- 4
18. 24- 8

19. 19- 3

20. 16-12

Această soluție este simetrică. Figura 113 arată pozițiile pieselor după cea de-a zecea mutare. Dacă tabla este acum întoarsă și primele zece mutări sînt repetate în ordine inversă, transportul cerut este complet. După cîte știu, aceasta este prima soluție publicată de 20 de mutări. Ea este departe de a fi unică. Am primit și alte soluții simetrice în 20 de mutări, precum și una teribil de asimetrică de la d-na Georgianna March — singura femeie printre cei 14 cîștigători.

73

CAPITOLUL XIX

încă nouă probleme

1. ARANJAREA MONEDELOR

Euați trei monede de 25 de bani și două monede de 10 bani și aranjați-le alternînd, ca în fig. 114. Problema constă în a le schimba pozițiile ca în partea de jos a figurii, în cît mai puține mutări.

O „mutare” constă în așezarea a două degete pe oricare două monede vecine — dintre care una trebuie să fie o monedă de 25 bani, iar cealaltă, o monedă de 10 bani, apoi în translarea perechii pe o altă poziție de-a lungul dreptei imaginare arătate în figură. Cele două monede ale perechii trebuie să rămîină tot timpul în atingere.

Moneda din dreapta

Fig. 114 Problema celor două monede.

73

unei perechi trebuie să rămîină în dreapta, iar cea din stînga trebuie să rămîină în stînga. Sînt admise locuri goale în șir la sfîrșitul fiecărei mutări, cu excepția ultimei. Nu este nevoie ca, după ultima mutare, piesele să se găsească pe același loc ca la început pe linia imaginară.

Dacă ar fi voie să se deplaseze două monede de același fel, problema ar putea fi rezolvată ușor în trei mutări: deplasați prin translație 1,2 spre stînga, umpleți locul gol cu 4, 5, apoi mutați 5,3 din capătul drept în cel stîng. Condiția ca cele două monede să fie diferite face problema extrem de interesantă. Problema mi-a fost transmisă de H. S. Perei val, din Garden City (New York).

2. PÎINEA PRĂJITĂ

Chiar și cea mai simplă dintre treburile casnice poate pune probleme destul de complicate în ceea ce privește raționalizarea timpului. Duați, de pildă, prepararea a trei felii de pîine prăjită și unse cu unt, cu ajutorul unui aparat electric obișnuit, prevăzut cu două „uși” rabatabile laterale, care țin feliile de pîine strîns pe rezistență; el poate fi încărcat cu două felii de pîine dintr-o dată, dar nu le poate prăji decît pe o față. Pentru a le prăji și pe cealaltă, trebuie ca „ușile” să fie deschise și feliile întoarse.

Pentru a pune o felie de pîine în aparat, sînt necesare trei secunde ; pentru a scoate o felie — trei secunde; pentru a întoarce o felie fără a o scoate — trei secunde. Pentru fiecare din aceste operații sînt necesare ambele mîini, ceea ce înseamnă că nu este posibil să introduceți, să scoateți sau să întoarceți două felii dintr-o dată. De asemenea nu este posibil să ungeți cu unt o felie în timp ce introduceți, scoateți sau întoarceți o altă felie. Timpul în care o față a unei felii se prăjește este de 30 de secunde, iar timpul necesar pentru ungerea cu unt a unei felii — 12 secunde.

Fiecare felie este unsă cu unt numai pe o parte. Nici o față nu poate fi unsă cu unt înainte de a fi fost prăjită. O felie prăjită și unsă cu unt pe o parte poate fi introdusă din nou în aparat pentru a fi prăjită pe cealaltă față. Se consideră că aparatul este bine încălzit de la început. Care este timpul cel mai scurt în care pot fi prăjite pe ambele fețe și unse cu unt trei felii de pîine?

3. DOUĂ PROBLEME CU PENTOMINOURI

Pentru pasionații după probleme cu pentominouri, iată două probleme recent descoperite; prima dintre ele este mai ușoară.

A. în stînga fig. 115, cele 12 pentominouri sînt astfel aranjate încît să formeze un dreptunghi de 6×10 . Împărțiți dreptunghiul

73

Fig. 115. O problemă cu pentominouri.

— numai după liniile negre — în două părți care pot fi asamblate din nou pentru a forma figura cu trei găuri din dreapta.

B. Aranjați cele 12 pentominouri ca să formeze un dreptunghi de 6×10 , dar în așa fel încît fiecare pentomino să atingă marginile dreptunghiului. Dintre cele cîteva mii de moduri fundamentale diferite de a construi dreptunghiul de 6×10 (rotațiile și reflexiile nu sînt considerate diferite), se știe că numai două îndeplinesc condițiile acestei probleme. Piesele asimetrice pot fi așezate cu oricare față în sus.

4. O TEOREMĂ A PUNCTULUI FIX

Într-o dimineață, exact la răsăritul soarelui, un călugăr budist începu să urce un munte înalt. Cărarea, foarte îngustă, mergea în spirală în jurul muntelui, urcînd către un templu care se zărea în vîrf.

Călugărul urca drumul cu diferite viteze, oprindu-se de multe ori să se odihnească și să mănînce din fructele uscate pe care le adusese cu el. El ajunse la templu cu foarte puțin înainte de apusul soarelui. După mai multe

zile de post și rugăciune, el porni înapoi pe același drum, plecînd o dată cu răsăritul soarelui, mergînd cu viteze variate și făcînd multe pauze pe parcurs. Desigur, viteza lui medie la cobo-rîre era mai mare decît viteza medie la urcare.

Arătați că pe drum există un punct în care călugărul ajunge afit la urcare cît și la cobo-rîre, în exact același moment al zilei.

5. DOUĂ PROBLEME CU CIFRE

Cele două probleme care urmează par să necesite un calculator cifric, care să testeze sute de combinații de cifre într-un timp rezonabil de scurt. Dacă însă sînt abordate just și se recurge la unul sau

74

3 1 8+	7	"6j	f
6 5 4	8!	5	2
972	91	41	,-31

Fig. 116 Pot fi combinate două tipuri de pătrate ? caracteristicile celor

două artificii inteligente, ambele probleme pot fi rezolvate cu foarte puțină muncă cu creionul și hîrtia. Prin astfel de „scurtături”, un programator iscusit poate economisi timpul de utilizare a calculatorului electronic — în unele cazuri se poate chiar renunța complet la ajutorul acestuia.

A. The Square Root of Wonderful (Radical din minunat) este titlul unei piese jucate nu de mult pe Broadway.

Dacă fiecare literă din WONDERFUL reprezintă o cifră diferită (dar nu zero) și dacă cuvîntul OODDF reprezintă, folosind același cod, rădăcina pătrată, care este rădăcina pătrată din Wonderful (din minunat) ?

B. Există mai multe moduri în care cele nouă cifre (fără zero) pot fi aranjate în pătrat, în așa fel încît să reprezinte o sumă. în exemplul din stînga fig. 116, 318 plus 654 dă 972. Există, de asemenea, multe moduri de a plasa cifrele într-o matrice pătratică, în așa fel încît, luate în ordine serială, să formeze un lanț de felul celui trasat de mișcarea unui turn la șah. Un exemplu este prezentat în partea dreaptă a figurii. Puteți începe de la 1, apoi, muțînd cîte un pătrat, puteți trece pe rînd la 2, 3, 4, și așa mai departe pînă la 9.

Problema constă în a satisface ambele condiții cu un singur pătrat. Cu alte cuvinte, plasați cifrele într-o matrice de 3x3, în așa fel încît să formeze un lanț de felul celui trasat de mișcarea unui turn la șah, de la 1 la 9, iar rîndul de jos să fie suma primelor două rînduri. Răspunsul este unic.

6. CUM ȘI-A POTRIVIT KANT CEASUE?

Se spune că Immanuel Kant¹ era un burlac cu obiceiuri atît de regulate, încît locuitorii Konigsbergului își potriveau ceasurile cînd îl vedeau trecînd prin anumite puncte ale orașului.

într-o seară, Kant fu foarte neplăcut surprins să constate că propriul său ceas de perete s-a oprit. în mod evident, servitorul, care avea zi liberă, uitase să-l întoarcă. Cum ceasul de buzunar era dat la filozof german, 1724-1804. - N.T.

74

reparat, Kant nu avea cum potrivi limbile celui de perete. Așa că se hotărî să facă o vizită prietenului său Schmidt, care locuia la circa 2 km distanță. De cum intră în casa acestuia, Kant își aruncă o privire spre pendulă. După cîteva ore, Kant își luă rămas bun și o porni spre casă pe același drum pe care venise. Ca întotdeauna, el a mers cu un pas încet și constant pe care nu și-l schimbase în 20 de ani. Nu avea nici o idee despre cît durează drumul de la Schmidt pînă acasă, pentru că Schmidt se mutase de curînd într-o casă nouă și Kant nu avusese încă timp să cronometreze drumul. Cu toate acestea, imediat ce intră în casă, el stabili fără ezitare limbile ceasului la o anumită oră.

Cum a putut ști Kant care era ora exactă ?

7. JOCUD CEDOR „DOUĂZECI DE ÎNTREBĂRI”, ATUNCI CÎND PROBABILITĂȚILE SÎNT CUNOSCUTE

în binecunoscutul joc Douăzeci de întrebări, o persoană se gîndește la un obiect — cum ar fi Statuia Libertății sau Călciul lui Ahile — iar o altă persoană încearcă să ghicească obiectul cu ajutorul a cel mult 20 de întrebări, la care se poate răspunde prin da sau nu. De obicei cele mai bune întrebări sînt cele care împart mulțimea obiectelor posibile în două submulțimi, egale pe cît se poate ca număr. Astfel, dacă prima persoană a ales ca „obiect” un număr între 1 și 9, numărul acela poate fi ghicit cu procedeul de mai sus în nu mai mult de patru întrebări, uneori chiar mai puține. Din 20 de întrebări se poate ghici orice număr cuprins între 1 și 220 (adică 1048 576).

Să presupunem acum că fiecărui dintre obiectele posibile i se poate atribui o anumită valoare distinctă, care să reprezinte probabilitatea ca obiectul respectiv să fi fost ales. De exemplu, să presupunem că un pachet de cărți

este format dintr-un as de cupă, doi de „doi de cupă”, trei de „trei” și așa mai departe pînă la nouă nouari de cupă, în total 45 de cupe. Pachetul este amestecat și cineva alege o carte. Dv. trebuie să ghiciți această carte punînd întrebări la care se poate răspunde prin da sau nu. Cum ați putea minimiza numărul probabil de întrebări pe care le aveți de pus ?

8. NU FACEȚI MAT DINTR-O MUTARE

Răspunzător pentru revoltătoarea problemă ilustrată în fig. 117 este Karl Fabel, un problemist german de șah. Ea a apărut recent în delicioasa rubrică de probleme de șah non-conformiste, publicată de Mei Stovfer în revista „Canadian Chess Chat”.

75

0			■ -			tTTTfs
	w	<*				0
	•				s	. ■
					i	l
		o		fiii rnxi	i- * o 2	
■			i		•
			- Sfc	o		â
		t-&		i		
			-' ■		

Fig. 117 Albul mută și nu face mat.

Vi se cere să găsiți pentru alb o mutare care nu ar duce la șah-mat imediat pentru regele negru.

9. GĂSIȚI HEXAEDREEE

Un poliedru este un corp în spațiu, mărginit de plane — fețele poliedrului. Cel mai simplu poliedru este tetraedrul, care are patru fețe — fiecare din ele un triunghi (vezi fig. 118, sus). Tetraedrul poate avea o varietate nesfîrșită de forme, dar dacă considerăm rețeaua sa de muchii drept un invariant topologic (adică, dacă ne permitem să schimbăm lungimea oricărei muchii și unghiurile sub care acestea se întîlnesc, cu condiția însă să păstrăm structura rețelei), atunci există un singur tip fundamental de tetraedru. Cu alte cuvinte, un tetraedru nu poate avea drept fețe decît niște triunghiuri.

Poliedrul cu cinci fețe are două varietăți fundamentale (fig. 118, mijloc și jos). Una este reprezentată de marile piramide ale Egiptului (patru triunghiuri pe o bază cu patru laturi). Cealaltă este reprezentată de un tetraedru care are un colț tăiat: trei fețe sînt patrulater, iar două triunghiuri.

John McClellan, un artist din Woodstock (New York), pune întrebarea : cîte varietăți fundamentale de hexaedre convexe, adică de

75

Fig. 118 Trei tipuri de poliedre.

poliedre cu șase fețe, există în total ? (Un corp în spațiu este convex dacă fiecare dintre fețele sale poate fi așezată în întregime pe o masă.) Exemplul cel mai banal este, bineînțeles, cubul.

Dacă veți căuta hexaedre tăind colțurile unor corpuri mai simple, trebuie să aveți grijă să evitați dublurile. Astfel, dacă se taie vîrfurile unei piramide egiptene, rămîne un schelet care este echivalent, topologic, cu cel al cubului. Aveți, de asemenea, grijă, să evitați modelele care nu pot exista fără fețe curbe.

RĂSPUNSURI

1. Jocul celor două monede poate fi rezolvat în patru mutări, după cum urmează. Monedele sînt numerotate de la stînga spre dreapta. »

75

- 1) Mutați 3, 4 la dreapta lui 5, dar separate de 5 printr-un spațiu egal cu lărgimea a două monede.
- 2) Mutați 1, 2 la dreapta lui 3, 4, cu monedele 4 și 1 în contact.
- 3) Mutați 4, 1 în spațiul dintre 5 și 3.
- 4) Mutați 5, 4 în spațiul dintre 3 și 2.

2. Folosind acest aparat de modă veche, trei felii de pîine — A, B, C — pot fi prăjite și unse cu unt în două minute. Fig. 119 ilustrează modul de a realiza acest lucru.

După ce această soluție a fost publicată, am fost pus în mare încurcătură aflînd că timpul poate fi scurtat la 111 secunde. Ceea ce neglijasem era posibilitatea de a prăji parțial o față a unei felii, de a o scoate din aparat și de a o reintroduce mai tîrziu pentru a termina prăjitul. Soluții de acest gen mi-au trimis Richard A. Brouse, programator-analist la un calculator IBM din San Jose (California), R. J. Davis, Jr., din Dittie Falls (New Jersey), John F. O'Dowd, din Quebec (Canada) Mitchell P. Marcus, din Birmingham (New York) și Howard Robbins, din Vestal (New York).

Procedul lui Davis este următorul:

Secundele Operația

Introduceți felia A Introduceți felia B

A a fost prăjită 15 secunde pe o față Scoateți felia A Introduceți felia C B a fost prăjită complet pe o față Scoateți felia B Introduceți felia A, întoarsă Ungeți cu unt felia B Scoateți felia C Introduceți felia B Ungeți cu unt felia C Scoateți felia A Introduceți felia C Ungeți cu unt felia A Scoateți felia B

Introduceți felia A, astfel întoarsă ca să completați prăjirea părții numai parțial prăjite Felia A este complet prăjită Scoateți felia C.

1- 3

3- 6

6- ■18

18- 21

21- •23

23- •36

36- •39

39- •42

42- ■54

54- •57

57- -60

60- ■72

72- ■75

75- ■78

78- ■90

90- -93

.93- -96

96- -108

108- -111

76

o-

10-

20-

30-

40

50

Introduceți A Introduceți B

întoarceți A Scoateți B Introduceți C

Ungeți cu unt B

60-

90-

100-

Scoateți B

r

Scoateți C

Ungeți cu unt C

120

Fig. 119 Soluția problemei prăjirii a trei felii de pâine în numai 2 minute.

Scoateți A introduceți B Introduceți C

Ungeți cu unt A

Toate feliile sînt acum prăjite și unse cu unt, însă felia A se mai află încă în aparat. Chiar dacă A trebuie scoasă din aparat, pentru a completa lanțul de operații, timpul nu depășește 114 secunde.

76

Robbins a atras atenția asupra faptului că spre sfîrșit, în timp ce felia A se mai află încă în prăjitor, timpul poate fi folosit foarte eficient mîncînd felia B.

3. în fig. 120 se arată modul în care dreptunghiul de 6×10 , format din cele 12 pentominouri, poate fi tăiat în două părți care pot fi rearanjate astfel încât să formeze un dreptunghi de 7×9 , cu trei găuri interioare. Fig. 121 arată singurele două posibilități de construire a dreptunghiului de 6×10 , astfel ca toate cele 12 piese să atingă marginea. Cea de a doua dintre aceste două variante este de asemenea remarcabilă și prin faptul că poate fi împărțită în două părți congruente (ca și dreptunghiul din problema precedentă cu pentominouri).

4. Un călugăr urcă un munte într-o zi și-l coboară în altă zi. Există undeva pe drum un punct în care el ajunge în același moment al zilei, la ducere și la întoarcere? Problema mi-a fost adusă la cunoștință de psihologul Ray Hyman, de la Universitatea din Oregon, care, la rîndul său, a găsit-o într-o monografie intitulată Rezolvarea problemelor, scrisă de psihologul configuraționist german Karl Duncker. Duncker scrie că el personal nu a fost în stare să o rezolve, mențio-nînd cu satisfacție că nimeni dintre cei cărora le-a pus problema nu au putut-o rezolva. Există mai multe căi de a o aborda — continuă el — „dar probabil că nici una nu este mai evident clară decît următoarea : presupunem că urcușul și coborișul este efectuat de două

Fig. 120 Un dreptunghi de 6×10 construit din pentominouri poate fi refăcut ca dreptunghi de 7×9 , avînd trei găuri.

Fig. 121 Toate pentominourile care intră în compoziția acestor dreptunghiuri de 6×10 ating marginile.

77

persoane, într-o aceeași zi. Ele trebuie să se întîlnească. Așadar, dintr-o condiție obscură și greu de controlat în ansamblu, situația a fost adusă brusc în plină lumină".

5. A. Dacă OODDF este rădăcina pătrată a lui WONDERFUL, care este numărul pe care îl reprezintă? O nu poate fi mai mare decît 2, fiindcă ridicarea la pătrat ar duce la un număr cu zece cifre. Nu poate fi 1, deoarece nici un număr care începe cu 11 nu poate avea un pătrat a cărui a doua cifră să fie 1. Prin urmare, O trebuie să reprezinte pe 2.

WONDERFUL trebuie să fie cuprins între pătratele lui 22 000 și 23 000. Pătratul lui 22 este 484; pătratul lui 23 este 529. Întrucît cea de-a doua cifră a lui WONDERFUL este 2, putem conchide că WO m 52.

Ce valori trebuie date literelor din 22DDF pentru ca pătratul să fie egal cu 52NDERFUL? Pătratul lui 229 este 52 441; pătratul lui 228 este 51 984. Prin urmare, ODD este fie 2299, fie 2288.

Vom folosi acum un artificiu, bazat pe noțiunea de rădăcină cifrică. Suma celor nouă cifre din WONDERFUL (unde, după cum am spus, zero nu apare) este 45, care, la rîndul său, dă o sumă egală cu 9 — rădăcina sa cifrică. Rădăcina lui pătrată trebuie să aibă o rădăcină cifrică care, atunci cînd este ridicată la pătrat, dă un număr care are rădăcina cifrică 9. Singurele rădăcini* cifrice care îndeplinesc această condiție sînt 3, 6 și 9 — prin urmare, OODDF trebuie să aibă rădăcina cifrică 3, 6 sau 9.

F nu poate fi 1, 5 sau 6, deoarece oricare dintre aceste cifre ar plasa un F la sfîrșitul lui WONDERFUL.

Singurele completări posibile pentru 2299F și 2288F care îndeplinesc această cerință în legătură cu rădăcina cifrică sînt 22 998, 22 884 și 22 887.

Pătratul lui 22 887 este 523 814 769 — singurul număr care se potrivește cu cuvîntul codificat WONDERFUL.

B. Ceea ce salvează mult timp în rezolvarea acestei probleme este observația că dacă cele două cifre sînt plasate într-o matrice de 3×3 , astfel încît să formeze un lanț de la 1 la 9, de forma drumului unui turn de șah, cifrele impare trebuie să ocupe celula centrală și cele patru celule din colțuri. Acest lucru poate fi văzut ușor colo-rînd cele nouă celule alternativ, ca pe tabla de șah — celula din mijloc fiind colorată în negru. Deoarece numărul celulelor negre depășește cu unu pe cel al celulelor albe, drumul trebuie să înceapă și să se sfîrșească pe o celulă neagră; în acest fel, toate cifrele pare vor cădea în celulele albe.

Există 24 de moduri diferite de a aranja cele patru cifre pare în celulele albe. Opt dinre acestea — în care 2 este așezat opus lui 4 —

77

1-		9!
i		8
5^-	~6~	

+

Fig. 122 cifre.

Soluția problemei lanțului de

pot fi eliminate dintr-o dată, deoarece nu permit realizarea unui drum complet al cifrelor în ordine serială.

Celelalte 16 variante pot fi foarte repede verificate, ținînd seama că suma celor două cifre de sus de pe coloana întîi trebuie să fie mai mică decît 10, iar suma celor două cifre de sus de pe coloana a treia trebuie să fie mai

mare decît 10. A doua dintre aceste afirmații este adevărată din cauză că cele două cifre de sus de pe coloana din mijloc sînt una pară și alta impară — suma lor fiind totuși o cifră pară. Aceasta se poate întîmpla numai dacă se transportă l'de la adunarea cifrelor din dreapta. Singurul mod de a forma drumul, în așa fel ca rîndul de jos al matricei să fie suma rîndurilor unu și doi, este cel din fig. 122.

După publicarea acestei soluții în „Scientific American”, Harmon H. Goldstone, din New York, și Scott B. Kilner, din Corona (California), mi-au trimis o metodă folosită de ei, ceva mai rapidă. Există numai trei drumuri de tipul celui trasat de un turn, esențial diferite (abstracție făcînd de rotații și reflexii) : cel arătat în figură, un drum spiralat pornind dintr-un colț spre centru și un drum în formă de S pornind dintr-un colț spre colțul diagonal opus. Pe fiecare dintre aceste drumuri, cifrele pot merge în ordine în ambele direcții, formînd astfel șase modele diferite. Examinîndu-le pe fiecare țînînd seama de diferitele rotații și reflexii, se ajunge repede la soluția unică.

Observați că dacă soluția este reflectată într-o oglindă (ținută în partea de sus a matricei), se obține o matrice ale cărei cifre sînt și ele în ordine serială; pe un traseu de tipul turnului de șah și astfel dispuse încît dacă din rîndul ei de sus se scade rîndul din mijloc, se obține rîndul de jos.

Dacă mișcarea turnului este înlocuită cu mișcarea reginei, există numai patru soluții (dintre care una identică cu cea de aici) în care numerele de la 1 la 9 sînt în ordine serială pe un traseu de tip regină. Ele au fost date de Charles W. Trigg într-o detaliată analiză a soluțiilor de forma $ABC + DEF = GHK$, publicată în „Recreational Mathematics Magazine”, nr. 7, februarie 1962, pp. 35—36.

6. Immanuel Kant și-a calculat momentul exact în care s-a întors acasă în felul următor. Înainte de a pleca de acasă, el a întors ceasul de perete, astfel că privindu-l la plecare și la venire a aflat cît timp

78

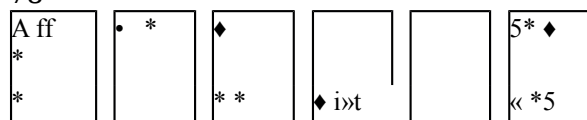
a lipsit de acasă. Din acesta, a scăzut timpul petrecut la Schmidt (fiindcă s-a uitat la venire și la plecare, la ceasul din holul acestuia). A obținut astfel timpul total cît a durat plimbarea. Deoarece s-a întors pe același drum și cu aceeași viteză, a împărțit durata totală a plimbării la doi, ca să afle cît a făcut la întoarcere. Acest timp, adăugat la ora plecării de la Schmidt, i-a indicat ora sosirii acasă. Nu a mai avut decît să mute limbile ceasului.

Winston Jones, din Johannesburg (Africa de Sud), a sugerat o altă soluție. Dl. Schmidt, prietenul lui Kant, era ceasornicar. Așa că, pe cînd stăteau și discutau, i-a reparat, poate, ceasul de buzunar al lui Kant.

7. Prima operație este să facem o listă a probabilităților pentru cele două cărți: $1/45, 2/45, 3/45, \dots$. Primele două valori pot fi combinate pentru a forma un nou element: $1/45$ plus $2/45$ este egal cu $3/45$. Cu alte cuvinte, probabilitatea ca o carte aleasă să fie un as sau un doi, este de $3/45$. Există acum opt elemente: setul as-doi, setul „trei”, setul „patru” și așa mai departe pînă la „nouă”. Combinăm din nou primele două probabilități ale acestui șir: valoarea $3/45$ pentru setul as-doi și probabilitatea $3/45$ de a alege un trei. Acest nou element, format din cărți cu valoare de as, doi și trei, are o probabilitate de apariție de $6/45$. Aceasta este mai mare decît probabilitățile pentru „patru” sau pentru „cinci”, așa că atunci cînd combinăm cele două probabilități de valori minime, trebuie să combinăm cărțile cu valorile patru și cinci pentru a obține un nou element cu valoarea $9/45$. Procedeu acesta de asociere în pereche a primelor două valori din șirul nou format este continuat pînă cînd rămîne un singur element. Acesta va avea probabilitatea de $45/45$, adică 1. Diagrama din fig. 123 arată cum se face combinarea elementelor. Strategia pentru minimalizarea numărului de întrebări constă în a lua aceste perechi în ordine inversă. Astfel, prima întrebare ar putea fi: cartea aleasă se află în setul de „patru, cinci sau nouă”? Dacă răspunsul este Nu, ea se poate afla în celălalt set, așa că întrebarea următoare va fi: este cartea un șapte sau un opt? Și așa mai departe pînă o ghiciți.

Observați că dacă este vorba de un as sau de un „doi”, sînt necesare cinci întrebări să'îl ghiciți. O strategie binară, de împărțire pur și simplu a elementelor, la fiecare întrebare, după subansambluri pe cît posibil mai egale, ar asigura* ghicirea cărții în cel mult patru întrebări, poate chiar în trei. Totuși, procedeul descris mai sus dă pentru minimul numărului așteptat de întrebări, la repetarea de foarte multe ori a jocului, o valoare ceva mai mică. În cazul de față, numărul minim este trei.

78



i 2 3 4 5 6
45 45 45 45 45 45

7

45

^1

♦ *8

45

3 45

45

15. 45
6_45
45
45
J8_45
45 45

Fig. 123 Strategia folosită la minimizarea numărului de întrebări prin Da sau Nu, la ghicirea unuia dintre mai multe obiecte care au probabilitate de apariție diferită.

Acest număr minim se calculează în felul următor: când cartea aleasă este un as, sînt necesare cinci întrebări. Tot cinci sînt necesare când cartea este un doi, dar există doi de „doi”, așa că este nevoie de zece întrebări. În mod similar, cele trei cărți de trei necesită de trei ori patru — adică 12 — întrebări. Numărul total de întrebări pentru toate cele 45 de cărți este 135, adică o medie de trei întrebări pentru fiecare carte.

Strategia expusă a fost descoperită de David A. Huffman, inginer electrician la Institutul tehnologic din Massachusetts, pe vremea când era încă student acolo. Ea este explicată în lucrarea 0 metodă de construire a codurilor cu redundanță minimă, publicată în „Proceedings of the Institute of Radio Engineers”, voi. 40, septembrie 1952, pp. 1098—1101. Strategia a fost redescoperită mai tîrziu de Seth Zimmerman, care a descris-o în articolul Un procedeu optimal

79

8

45

de triere din „American Mathematical Monthly”, voi. 66, octombrie 1959, pp. 690—693. O foarte bună expunere netehnică a procedurii poate fi găsită în cartea Symbols, Signals and Noise (Simboluri, semnale și zgomot), de John R. Pierce (ed. „Harper & Brothers”, 1961), cu începere de la p. 94.

8. Albul poate evita victoria prin șah-mat asupra negrului numai prin mutarea turnului cu patru câmpuri spre stînga. Această mutare

Fig. 124 Cele șapte varietăți de hexaedre convexe.

79

atacă regele negru, dar negrul poate acum să „bată” nebunul alb cu turnul său.

Cînd problema a apărut în „Scientific American”, foarte mulți cititori au făcut observația că situația din fig. 117 nu este posibilă, deoarece există doi nebuni albi pe câmpuri de aceeași culoare. Ei au uitat că un pion ajuns pe ultimul rînd poate fi transformat în orice piesă, nu numai în regină. Oricare dintre cei doi pionii albi care lipsesc de pe tablă ar fi putut fi transformat într-un al doilea nebun.

Există multe partide aparținînd unor maeștri, în care pionii au fost transformați în cai. Este adevărat că transformarea în nebuni este extrem de rară; dar se pot imagina situații în care ea să fie avantajoasă. De exemplu, pentru evitarea poziției de „pat”. Sau, albul își poate da seama că ar putea câștiga jocul printr-un șah-mat foarte subtil folosind fie o nouă regină, fie un nou nebun. Dacă se hotărăște pentru regină, aceasta poate fi „bătută” de un turn negru, care la rîndul său este „bătut” de calul alb; dacă însă își transformă pionul în nebun, s-ar putea ca negrul să ezite să schimbe un turn pentru un nebun, așa că nebunul ar rămîne pe tablă.

9. Cele șapte varietăți de hexaedre convexe, cu schelete topologic distincte, sînt arătate în fig. 124. Nu cunoștii o cale simplă de a demonstra că nu există și altele. O demonstrație mai puțin formală estedată de John McClellan în articolul Problema hexaedrelor, publicat în „Recreațional Mathematics Magazine”, nr. 4, august 1961 pp 34-40.

CAPITOLUL XX

Calculul cu diferențe finite

Calculul cu diferențe finite — o ramură a matematicii nu prea bine cunoscută, dar care se dovedește de multe ori extrem de folositoare — se situează undeva la jumătatea drumului între algebra și calculul diferențial și integral. W. W. Rouse Ball, un matematician de la Universitatea Wesleyană (Middletown, Connecticut), obișnuiește să-l introducă studenților executînd în fața lor următorul truc de „citire a gîndului”.

În loc să cereți cuiva să „se gîndească la un număr”, cereți-i. „Să se gîndească la o expresie matematică”. Pentru a face trucul mai ușor, expresia trebuie să fie pătratică (puterile lui x trebuie să nu depășească 2). Să presupunem că partenerul se gîndește la $5x^2 + 3x - 7$. Sînd cu spatele, ca să nu-i vedeți calculele, cereți-i să înlocuiască x cu 0, 1 și 2 și să vă spună cele trei valori pe care le capătă astfel expresia. Valorile pe care vi le dă vor fi —7, 1 și 19. După cîteva calcule sumare (pe care cu puțin antrenament le puteți face în gînd), îi comunicați expresia la care s-a gîndit!

Metoda este foarte simplă. Așezați într-un rînd cele trei valori pe care vi le-a comunicat. Sub ele, scrieți diferențele dintre două valori vecine, scăzînd întotdeauna numărul din stînga din vecinul lui din dreapta. Într-un al treilea rînd puneți diferența dintre numerele din rîndul al doilea. Tabelul arată astfel:

-7 1 19

8 18

10

Coeficientul lui x^2 din formula căutată va fi totdeauna jumătate din numărul din ultimul rând al acestui tabel. Coeficientul lui x se obține scăzând jumătatea numărului de jos din primul număr din rândul al doilea. Constanta din formulă nu este altceva decât primul număr din rândul de sus.

Procedul este întru cât va analog integrării. Dacă notăm cu y valoarea, atunci formula ca atare exprimă o funcție y de variabila x . Când lui x i se dau valori în progresie aritmetică (0, 1, 2, ...), y , ia o serie de valori (— 7, 1, 19, ...). Calculul cu diferențe finite este studiul unor astfel de serii. În cazul dat, făcând un calcul simplu cu cei trei termeni ai unei serii, ați putut deduce funcția pătratică care a generat cei trei termeni.

Calculul cu diferențe finite își trage originile din Methodus Incrementorum (Metoda creșterilor), un tratat publicat între 1715 și 1717 de matematicianul englez Brook Taylor¹ (cel care a descoperit și celebra teoremă care-i poartă numele, din calculul diferențial). Prima lucrare importantă asupra acestui subiect apărută în limba engleză (după cele ale lui Leonhard Euler și alții² a fost publicată în 1860 de George Boole², celebru prin lucrările lui de logică simbolică. Manualele de algebră din secolul al XIX-lea includeau deseori o schiță a calculului, dar mai apoi acesta a căzut în dizgrație — poate cu excepția folosirii sale pentru verificarea tabelelor de dobânzi sau, ocazional în știință, pentru găsirea formulelor și a valorilor de interpolare. Astăzi, calculul este din nou la modă, fiind un instrument extrem de valoros în statistică și în științele sociale.

Pentru cei interesați în matematica recreativă există metode elementare ale acestui tip de calcul, care se pot dovedi de un mare folos. Să vedem, de pildă, cum poate fi aplicat calculul cu diferențe finite la o problemă veche, cum este cea a tăierii unui tort. Care este numărul n maxim de felii în care un tort poate fi tăiat prin n tăieturi în linie, dreaptă, fiecare intersectând pe toate celelalte? Acest număr este evident, o funcție de n . Dacă această funcție nu este prea complicată, metoda diferențelor ne poate ajuta să o găsim prin tehnici empirice

2 1815-1864. - N.T.

Zero tăieturi lasă, evident, tortul întreg; o tăietură dă două felii, două tăieturi — patru felii, și așa mai departe.

Nu este greu de găsit prin tatonări că seria începe astfel: 1, 2, 4, 7, 11, ... (vezi fig. 125) Faceți, ca și înainte, un tabel, ale cărui rânduri reprezintă diferențele dintre termenii vecini din rândul de deasupra:

Numărul de tăieturi

0

1

Numărul de felii Diferențele de ordinul întâi Diferențele de ordinul doi

2 4 7 11 12 3 4 1 1 1

Dacă seria inițială este generată de o funcție liniară, numerele din rândul diferențelor de ordinul întâi vor fi toate identice. Dacă funcția este pătratică, numerele identice apar în rândul diferențelor de ordinul doi. O expresie cubică ar da numere identice în rândul diferențelor de ordinul trei și așa mai departe. Cu alte cuvinte, numărul rândurilor

0 tăieturi

1 felie

1 tăietură

2 felii

2 tăieturi 4 felii

3 tăieturi 7 felii

4 tăieturi 11 felii

Fig. 125 Problema tortului.

80

de diferențe este tocmai gradul expresiei. Dacă tabelul ar cere zece rânduri de diferențe înainte ca numerele dintr-un rând să devină egale, asta ar însemna că funcția generatoare conține puteri pînă la x^{10} !

În cazul de față sînt numai două rânduri, prin urmare funcția trebuie să fie pătratică. Datorită acestui fapt, o putem obține rapid prin metoda deja folosită în trucul descris la începutul capitolului.

Problema tăierii tortului are două interpretări. O putem considera o problemă abstractă de geometrie pură (un cerc ideal tăiat de drepte ideale), sau o problemă de geometrie aplicată (un tort real tăiat cu un cuțit real). Fizica este plină de situații de felul acesta care pot fi privite din două puncte de vedere, și care implică formule derivabile din datele experimentale, cu ajutorul calculului cu diferențe finite. Un exemplu celebru de formulă pătratică este formula pentru numărul maxim de electroni care pot ocupa fiecare „nivel” energetic al unui atom. Pe măsură ce ne îndepărtăm de nucleu, seria evoluează astfel: 0, 2, 8, 18, 32, 50, ... Primul rând de diferențe este 2, 6, 10, 14, 18, ... Al doilea rând este 4, 4, 4, 4, ... Aplicînd metoda din trucul „de citire a gîndului”, obținem formula simplă n^2 pentru numărul maximi de electroni care pot ocupa cel de al n -lea nivel.

Dar cum procedăm dacă funcția este de un ordin mai înalt? În aceste cazuri putem folosi o formulă remarcabilă, descoperită de Isaac Newton. Aceasta este aplicată în toate cazurile, indiferent de numărul de rânduri din tabel.

Formula lui Newton presupune că seria începe cu valoarea funcției care corespunde lui $n = 0$. Să numim această valoare a . Primul număr al primului rând de diferențe este b , primul număr al rândului următor este c , și așa mai

departe. Expresia pentru cel de-al w -lea număr al seriei este
 $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-w+1)}{w!}$
 $a_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 1$...

Expresia este continuată numai pînă cînd toți termenii următori devin zero. De exemplu, cînd este aplicată problemei tăierii tortului, mărimile a, b, c se înlocuiesc cu $1, 1, 1$. (Restul expresiei este ignorat, deoarece toate rîndurile mai joase ale tabelului constau din zerouri; prin urmare, d, e, f, \dots au valoarea zero și toată partea expresiei care conține acești termeni nu contribuie cu nimic la sumă.) Obținem,

în felul acesta, funcția pătratică — $n^2 + n + 1$.
 înseamnă oare aceasta că am găsit astfel formula pentru numărul maxim de felii care pot fi obținute prin n tăieturi ale tortului? Din

81

păcate, tot ce putem spune în acest punct este „probabil” De unde provine această nesiguranță? Din friptul oS
 piut-wt-trace serie finită de nurnere-~~f~~ există o infinitate de funcții care pot genera acele numere (Aceasta este tot
 una cu a spune că fiind dat un număr oarecare de puncte pe un grafic, prin ele se poate trasa o infinitate de
 curbe.) Să considerăm seria $0, 1, 2, 3, \dots$ Care este termenul următor? O presupunere rezonabilă este 4 . într-
 adevăr, dacă aplicăm tehnica care tocmai a fost explicată, primul rînd de diferențe se va compune din 1 , iar
 formula lui Newton ne spune că cel de-al w -lea termen al seriei este n . Dar și expresia

$n - f - \dots - \frac{n(n-1)\dots(n-w+1)}{w!}$
 generează o serie care începe cu $0, 1, 2, 3, \dots$ în" cazul acesta seria continuă nu cu $4, 5, 6, \dots$, ci cu $5, 10, 21, \dots$
 Cam în felul acesta se descoperă și legile în știință. într-adevăr, metoda diferențelor poate fi deseori aplicată la
 fenomene fizice, în scopul de a „ghici” o lege a naturii. Astfel, să presupunem că un fizician cercetează pentru
 prima dată felul în care cad corpurile grele. El notează că, după o secundă, o piatră parcurge 5 m, după două
 secunde 20 m, după trei secunde 45 m etc. El își aranjează observațiile în felul următor:

0 5 20 45 80
 5 15 25 35
 10 10 10

Măsurătorile ar putea, firește, să nu fie prea exacte, dar numerele din ultimul rînd nu vor diferi mult de 10 , așa
 că fizicianul poate presupune că rîndul următor de diferențe constă din zerouri. Aplicînd formula lui Newton, el
 trage concluzia că distanța totală pe care cade piatra în n secunde este $5n^2$. Dar nimic nu este sigur în legătură cu
 această lege. Ea nu reprezintă altceva decît cea mai simplă funcție care corespunde unei serii"finite de observații
 — curba de ordinul cel mai mic care poate fi trasată printr-o serie finită de puncte ale unui grafic. Este adevărat,
 legea este confirmată din ce în ce mai mult, pe măsură ce observațiile se acumulează, dar niciodată nu putem fi
 siguri că noi observații suplimentare nu vor cere modificarea legii.

în ceea ce privește tăierea tortului, deși ceea ce se studiază este mai curînd o structură matematică pură decît o
 comportare a naturii, situația este surprinzător de asemănătoare. Fiindcă după tot ceea ce știm pînă acum s-ar
 putea ca a cincea tăietură să nu ducă la cele

81

16 felii prezise de formulă. Un singur eșec de acest gen ar aduce căderea formulei, în timp ce nici cel mai mare
 număr de succese nu o poate confirma o dată pentru totdeauna. „Natura — spune George Polya — poate să
 răspundă prin «da», sau «nu» însă ea șoptește un răspuns, iar pe celălalt îl pronunță cu glas de tunet; ea spune
 «da» condiționat, însă spune «nu» definitiv”. Polya vorbește despre lumea reală, nu despre structuri matematice
 abstracte, dar este foarte curios că observația sa se aplică la fel de bine și la ghicirea funcțiilor prin metoda
 diferențelor finite. Matematicienii practică pe scară largă ghicitul, după o schemă deseori similară metodelor
 științifice inductive, iar Polya a scris o lucrare fascinantă, *Mathematics and Plausible Reasoning*3 despre felul în
 care procedează ei.

Cîteva tatonări cu creionul și hîrtia arată că cinci tăieturi într-un tort duc într-adevăr la maximum 16 felii.
 Această prezicere reușită a formulei mărește probabilitatea ca formula să fie corectă. Dar pînă în clipa cînd va fi
 riguros demonstrată (ceea ce nu este prea greu, în acest caz), ea trăiește doar ca o presupunere rezonabilă. De ce
 atît în matematică, cît și în alte științe, se întîmplă atît de des ca formula cea mai simplă să fie și cea mai bună
 presupunere, aceasta este una dintre marile întrebări ale filozofiei moderne a științei. Măcar și pentru faptul că
 nimeni nu poate spune exact ce se înțelege prin „cea mai simplă formulă”.

Iată acum cîteva probleme care sînt strîns legate de problema tăierii tortului și care pot fi abordate prin calculul
 cu diferențe finite. Găsiți mai întîi forma cea mai plauzibilă pentru formulă, apoi încercați să demonstrați
 formula prin metode deductive. Care este numărul maxim de felii care pot fi obținute prin n tăieturi simultane
 (în linie dreaptă) ale unei figuri plane în formă de Dună în creștere ? Cîte felii de budincă se pot obține cu n
 tăieturi plane simultane printr-o bucată cilindrică? în cîte părți poate fi împărțit planul cu ajutorul unor cercuri de
 același diametru, care se intersectează ? Dar de diametre diferite? Dar cu ajutorul unor elipse de dimensiuni
 diferite? în cîte regiuni poate fi împărțit spațiul cu ajutorul unor sfere care se intersectează ?

Problemele recreaționale care implică permutări și combinații conțin deseori formule de ordin nu prea mare, care

pot fi mai întâi ghicite corect prin metoda diferențelor finite, sperînd ca mai apoi vor putea fi și demonstrate. Avînd o rezervă nelimitată de scobitori de n culori diferite, cîte triunghiuri diferite pot fi formate pe o suprafață plană, folosind trei scobitori pentru cele trei laturi ale triunghiului? (Reflexiile sînt considerate diferite, dar nu și rotațiile.) Cîte pătrate diferite? Cîte tetraedre diferite pot fi produse colorînd fiecare față cu o culoare diferită și folosind n culori diferite? (Două tetraedre sînt identice dacă pot fi întoarse și plasate față lîngă față, astfel ca fețele corespondente să fie de aceeași culoare.) Cîte cuburi cu n culori?

82

000000

060000

000000

Fig. 126 Din mărgelile de două culori pot fi formate 18 șiraguri diferite de cîte șapte mărgelile ?

față plană, folosind trei scobitori pentru cele trei laturi ale triunghiului? (Reflexiile sînt considerate diferite, dar nu și rotațiile.) Cîte pătrate diferite? Cîte tetraedre diferite pot fi produse colorînd fiecare față cu o culoare diferită și folosind n culori diferite? (Două tetraedre sînt identice dacă pot fi întoarse și plasate față lîngă față, astfel ca fețele corespondente să fie de aceeași culoare.) Cîte cuburi cu n culori?

Bineînțeles, dacă o serie este generată de o funcție care nu este un polinom de puterile variabilei, metoda diferențelor finite cere ajutorul altor tehnici. De exemplu, funcția exponențială 2^n generează seria 1, 2, 4, 8, 16, ... Rîndul diferențelor de ordinul întâi este tot 1, 2, 4, 8, 16, ..., așa că procedeul de mai înainte nu ar duce nicăieri. Uneori, o situație aparent simplă duce la o serie care rezistă la toate încercările de a găsi o formulă generală. Un exemplu care a dat mult de furcă este problema șiragului de mărgelile, din cartea de enigme a lui Henry Ernest Dudeney. Un șirag circular conține n mărgelile, negre sau albe. Cîte șiraguri diferite pot fi formate cu « mărgelile ? Pornind de la zero mărgelile, seria este 0, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 18, 30, ... (în fig. 126 sînt arătate cele 18 varietăți diferite de șiraguri pentru $n = 7$). Bănuiesc că în această serie intervin de fapt două formule — una pentru n impar și alta pentru n par — dar nu știu dacă ele pot fi obținute prin metoda diferențelor finite. „O rezolvare generală ...

82

este dificilă, dacă nu chiar imposibilă", scrie Dudeney. Problema este echivalentă cu următoarea din teoria informației : cîte cuvinte binare diferite, dar de o lungime dată, rămîn dacă se elimină, ca fiind identice, toate cuvintele cu o aceeași ordine ciclică a cifrelor, considerate fie de la dreapta spre stînga, fie că le luăm de la stînga spre dreapta?

O problemă mult mai simplă, cu care cititorii își pot încerca îndemînarea, mi-a fost trimisă de Charles B. Schorpp și Dennis T. O'Brien, din Wernersville (Pennsylvania) : care

Fig. 127 Din cinci linii drepte se pot forma este numărul maxim de triunghiuri. ghiuri care pot fi construite

cu ajutorul a n linii drepte? în fig. 127 se arată cum din cinci linii pot fi construite zece triunghiuri. Dar cîte pot fi construite din șase linii, și care este formula generală? Formula poate fi găsită mai întâi prin metoda diferențelor; apoi, cu puțină inspirație, nu este greu de arătat că formula este corectă.

ADAOS

Atunci cînd formula lui Newton este aplicată unor date obținute experimental, deseori apare o anomalie pentru cazul zero. De exemplu, în volumul Amuzamente matematice, la p. 287, se dă formula pentru numărul maxim de felii care pot fi obținute cu n tăieturi plane simultane într-un covrig. Formula este cubică :

$$nz + 3m^2 + 8n^6$$

și poate fi obținută aplicînd formula lui Newton unor rezultate obținute experimental, dar ea pare să nu se aplice în cazul $n = 0$. Cînd un covrig nu este tăiat, există evident o singură „felie", pe cînd formula spune că nu trebuie să existe nici una. Pentru a face formula aplica-

82

bilă, trebuie să definim „felie" ca o parte a covrigului produsă prin tăiere. Acolo unde există îndoieli asupra cazului zero, trebuie să operăm o extrapolare în tabelul cu diferențe, mergînd înapoi, și să admitem pentru cazul zero o valoare care produce primul număr dorit în ultimul rînd de diferențe.

Pentru a demonstra formula dată pentru numărul maxim de porții în care poate fi împărțit un tort (sau un cerc) cu ajutorul a n tăieturi liniare, să notăm mai întâi faptul că linia a n -z. intersectează cele $n - 1$ linii trasate anterior. Aceste $n - 1$ linii împart planul în n regiuni. Cînd cea de-a «-a linie traversează aceste n regiuni, ea taie fiecare regiune în două părți, prin urmare linia a w -a adaugă la totalul precedent n regiuni. La început există o singură piesă. Prima tăietură adaugă încă o piesă (felie), a doua tăietură adaugă încă două felii, a treia tăietură adaugă încă trei felii și așa mai departe pînă la cea de a n -a tăietură, care adaugă încă n felii. Așadar, numărul total de felii este $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Suma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ este

—,**(**— 1). La aceasta trebuie să adunăm 1 pentru a obține formula finală.

Problema șiragului de mărgelile a fost dată de Dudeney ca problema nr. 275 din cartea sa Puzzles and Curious Problems (Enigme și probleme ciudate). John Riordan menționează și el problema la pagina 162 (problema nr. 37) a cărții sale Introduction to Combinatorial Analysis (Introducere în analiza combinatorie) (ed. „Wiley & Sons.", 1958), indicînd soluția fără a da și formula. (Mai înainte, el discutase problema în articolul Semnificația combinatorie a teoremei lui Polya, în „Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics", voi. 5, nr. 4, decembrie 1957, pp. 232—234.) Problema a fost mai tîrziu analizată minuțios — găsindu-i-se și unele

aplicații surprinzătoare în teoria muzicii și în teoria circuitelor — de către Edgar N. Gilbert și John Riordan, în articolul Tipuri de simetrie ale secvențelor periodice din „Illinois Journal of Mathematics”, voi. 5, nr. 4, decembrie 1961, pp. 657 — 665. Autorii dau următorul tabel pentru numărul de tipuri diferite de șiraguri de mărgel, formate din mărgel de două culori, cu una pînă la 20 de mărgel:

Numărul de mărgel	Numărul de șiraguri de mărgel
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	13
7	18
8	30
9	46
10	78
11	126
12	224
13	380
14	687
15	1 224
16	2 250
17	4 112
18	7 685
19	14 310
20	27 012

în paranteză fie spus, existența formulelor pentru problema șiragului de mărgel nu înseamnă automat că Dudeney nu a avut dreptate spunînd că nu există soluție; se poate ca el să fi spus doar că nu este posibil să se găsească o expresie polinomială pentru numărul de șiruri ca funcție de n, astfel ca acest număr să poată fi calculat direct din formulă, fără ajutorul unui tabel conținînd factorii primi. Deoarece formula conține funcția F_4 a lui Euler, numărul de șiraguri trebuie calculat prin recurență⁵. Terminologia lui Dudeney nu este prea exactă, dar este posibil ca el să nu fi considerat formulele recursive drept „soluții”. Oricum, calculul cu diferențe finite nu este nici ntr-un fel aplicabil acestei probleme și se cunosc pentru ea doar formule recursive.

Mai multe zeci de cititori — prea mulți pentru a-i putea cita aici — au trimis soluții corecte ale problemei înainte ca formula lui Golomb să fi fost publicată ; unii dintre ei au dedus-o din lucrarea lui Riordan, iar alții cu totul independent. Mulți dintre ei au observat că atunci cînd numărul de mărgel este un număr prim (diferit de 2), formula care dă numărul de șiraguri devine foarte simplă:

$$\langle i \rangle = i - 1$$

$$i - L - 4 - 2 * 4 - 1.$$

n

s Formulă de recurență — o formulă care determină un termen al unui șir din unul sau mai mulți termeni precedenți. — A7.7".

83

Următoarea scrisoare a lui John F. Gummere, director al Școlii „William Penn”, din Philadelphia, a apărut în numărul din octombrie 1961 al revistei „Scientific American” :

„Am citit cu mult interes articolul dv. asupra calculului cu diferențe finite. Mi-am dat seama că una dintre cele mai interesante aplicații ale formulei lui Newton este cea pe care am descoperit-o eu însumi cu mult înainte de a lua cunoștință cu calculul acesta. Este vorba de aplicarea metodei diferențelor finite unei serii de puteri. Experimentînd cu anumite figuri, am observat că dacă se scriu o serie de pătrate, ca 4, 9, 16, 25, 36, 49, iar acestea se scad unul din altul, se obține o serie pe care o poți scădea din nou, ajungînd în cele din urmă la o diferență finită. Așa că am încercat cu cuburi și puteri egale cu patru, reușind să deduc o formulă care arăta că dacă n este puterea, trebuie să scazi de n ori, ajungînd astfel la o diferență constantă egală cu factorial de n. Am cerut atunci părerea tatălui (care a fost mai mulți ani directorul Observatorului memorial „Strawbridge” de la Colegiul Haverford și profesor de matematică). El mi-a spus pe un ton foarte jovial: «Ia te uită, John ! tocmai ai descoperit calculul cu diferențe finite !»”

RĂSPUNSURI

Cîte triunghiuri diferite pot fi formate cu n linii drepte? Sînt necesare cel puțin trei linii pentru fiecare triunghi, patru linii pentru a construi patru triunghiuri, cinci linii pentru a construi zece triunghiuri. Aplicînd calculul cu diferențe finite, se poate construi tabelul următor:

de linii	0	1	2	3	4	5
----------	---	---	---	---	---	---

de triunghiuri	0	0	0	1	4	10
de ordinul unu	0		0	1	3	6
de ordinul doi		0	1	2	3	
de ordinul trei			1	1	1	

Cele trei rînduri de diferențe indică o funcție cubică. Folosind formula lui Newton, se găsește funcția

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2),$$

6

care generează seria 0, 0, 0, 1, 4, 10, ... și are prin urmare șanse serioase de a fi tocmai formula pentru numărul maxim de triunghiuri care pot fi construite cu n linii. Dar, cum am mai spus, aceasta este doar o conjectură, bazată pe un număr mic de verificări cu creionul și hîrtia. Ea poate fi verificată prin următorul raționament.

84

Liniile trebuie desenate astfel încît oricare două dintre ele să nu fie paralele, iar printr-un punct să nu se treacă mai mult de două. În acest fel, este sigur că fiecare linie va intersecta toate celelalte linii și că fiecare set de trei linii trebuie să formeze un triunghi. Nu este posibil pentru aceleași trei linii date să formeze mai mult decît un triunghi, așa că numărul de triunghiuri astfel formate este maxim. Problema este echivalentă, prin urmare, cu întrebarea: în cîte moduri diferite pot fi luate 3 linii din n? Teoria elementară a combinațiilor răspunde: exact numărul dat de formula obținută empiric mai înainte.

Solomon W. Golomb — matematicianul care a mai fost menționat cu ocazia discutării poliominourilor — a fost foarte amabil și mi-a trimis soluția dată de el problemei șiragurilor de mărgel. Problema consta în a găsi o formulă pentru numărul de șiraguri diferite care pot fi formate cu n mărgel, presupunînd că mărgelile sînt de două culori și considerînd că diferitele rotații și reflexii ale șiragului nu sînt varietăți distincte. Formula se dovedește a fi cu mult peste puterile metodei diferențelor.

Să notăm cu d_1, d_2, d_3, \dots divizorii lui n (inclusiv 1 și n). Pentru fiecare divizor găsim așa-numita funcție F_i a lui Euler, pe care o notăm cu O_i . Această funcție este numărul de întregi pozitivi mai mici sau egali cu d, care nu au un divizor comun cu d. Se presupune că 1 este un astfel de întreg, dar nu și d. Astfel, O_8 este 4, deoarece 8 are următorii întregi care sînt primi în raport cu el: 1, 3, 5 și 7. Prin convenție O_1 este luat egal cu 1.

Funcțiile F_i ale lui Euler pentru 2, 3, 4, 5, 6 și 7 sînt 1, 2, 2, 4, 2 și 6, respectiv. Fie a numărul de culori în care sînt colorate mărgelile. Pentru șiraguri cu un număr impar de mărgel, formula care dă numărul de șiraguri diferite cu n mărgel este următoarea:

1

2«

$O_1 \cdot a + d \cdot (d_2) \cdot a^2 + \dots + n \cdot a^n$ Atunci cînd n este par, formula este următoarea:

$n \cdot n - i$

$\frac{1}{2} \cdot (a^1 + a^2 + \dots + a^n) + \frac{1}{2} \cdot (a^1 + a^2 + \dots + a^n)$

Punctele reprezintă operația de înmulțire. Golomb a exprimat aceste formule într-o formă mai comprimată și mai tehnică, dar cred că cele date aici pot fi mai ușor înțelese. Ele sînt generale, în sensul că pot fi aplicate pentru mărgel colorate în orice număr a de culori.

1

•În

84

Formulele care răspund celorlalte întrebări ale capitolului sînt:

1. Numărul de regiuni ale unei L, uni în creștere, care rezultă din n tăieturi drepte este dat de

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1$$

2. Numărul de felii de budincă obținute prin n tăieturi plane:

$$\frac{1}{2}n^2 + n - 1$$

3. Numărul în care este împărțit planul prin intersectarea a n cercuri:

$$n^2 - n + 2$$

4. Numărul de regiuni în care este împărțit planul prin intersectarea a n elipse:

$$2n^2 - n + 2$$

5. Numărul de regiuni ale spațiului realizate prin intersectarea a n sfere:

$$\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + 2n - 1$$

6. Numărul de triunghiuri care pot fi formate din scobitori de n culori:

$$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n$$

3

7. Numărul de pătrate care pot fi formate din scobitori de n culori:

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

4. '«f, 'vv.!

8. Numărul de tetraedre cu fetele de n culori:

$$n^3 + 3n^2 - 2n$$

0 1 If» o o I • o

12

9. Numărul de cuburi cu fețele de n culori:

$25m^4 - 120m^3 + 209m^2 - 108m$

85

REFERINȚE SUPLIMENTARE

1. Sistemul binar

Abaca logică de W. Stanley Jevons, în *The Principles of Science*, Macmillan

1874, Londra, cap. 6, pp. 104 — 105; reeditată în ediție de buzunar, Dover, 1958
Doi de Constance Reid, în *From Zero to Infinity*, ediție revăzută, Thomas Y.

Crowell, 1960, cap. 2. Cîteva jocuri binare de R. S. S c o r e r, P. M. G r u n d y și C. A. B. Smith,
în „*Mathematical Gazette*”, voi. 28, 1944, pp. 96-103. Cum să numărați pe degete de F r e d e r i k P o h l, în
Digits and Dastards, Ballantine, 1966.

Sortarea cartelelor și sistemul binar de John M i l h o l l a n d, în „*Mathematics Tea-*

cher”, voi. 44, 1951, pp. 312-314. O mașină de adunat cu cartele perforate, pe care o pot construi elevii de L a r
e w M.

Colii ster, in „*Mathematics Teacher*”, voi. 52, octombrie 1959, pp. 471 — 473

2. Teoria grupurilor și împletiturile

Teoria împletiturilor de Emil A r t i n, in „*Annals of Mathematics*”, seria a doua,

voi. 48, nr. 1, 1947, pp. 101-126. Împletituri și permutări de Emil A r t i n, în „*Annals of Mathematics*”, seria a
doua,

voi. 48, 1947, pp. 643-649.

85

Teoria împletiturilor de Emil Artin, în „*The American Scientist*” voi. 38, nr. 1, 1950, pp. 112-119; retipărit în
„*Mathematics Teacher*”, voi. 52, nr. 5, 1959, pp. 328 — 333. O discuție mai puțin tehnică a rezultatelor obținute
în cele două lucrări dinainte.

Asupra problemei coardei, a lui Dirac de M. H. A. N e w m a n, în „*The Journal of the London Mathematical
Society*”, voi. 17, partea a 3-a, nr. 67, 1942, pp. 173—177.

Asupra teoriei grupurilor:

The Theory of Groups de Marshall Hall Jr., Macmillan, 1959. *Groups* de G e o r g e s P a p y, St. Martin's
Press, 1964.

The Theory of Groups : An Introduction de J o s e p h J. R o t m a n, Allyn and Bacon, 1965.

Teoria grupurilor pentru învățămîntul secundar de Richard A. Dean, în „*Mathematics Teacher*”, voi. 55, nr. 2,
1962, pp. 98-105.

4. Jocurile și enigmaticele lui Lewis Carroll

The Lewis Carroll Picture Book, editată de Stuart Dodgson Collingwood, Unwin, 1899; retipărită în ediție de
buzunar, sub titlul *Divertismente și jocuri ale lui Lewis Carroll*, Dover, 1961.

Symbolic Logic and the Game of Logic de Lewis Carroll, Dover, 1958.

Pillow Problems and *a Tangled Tale* de Lewis Carroll, Dover, 1958.

Lewis Carroll și o enigmă din geometrie de W a r r e n W e a v e r, în „*American Mathematical Monthly*”, voi. 45,
1938, pp. 234-236.

Manuscrisele matematice ale lui Lewis Carroll de W a r r e n W e a v e r, în „*Proceedings of the American
Philosophical Society*”, voi. 98, 15 octombrie 1954, pp. 377 — 381.

Lewis Carroll, matematicianul de Warren Weaver, în „*Scientific American*”, aprilie 1956, pp. 116-128.

Matematica — văzută în oglindă de Margaret F. Willerding, în „*Scripta Mathematica*”, voi. 25, nr. 3, noiembrie
1960, pp. 209-219.

The Annotated Alice de Martin Gardner, Clarkson Potter, 1960; retipărită în ediție de buzunar de Forum Books,
1963, și de Penguin, 1965.

*The Annotated Snark** de Martin Gardner, Simon and Schuster, 1962.

85

5. Tăieturi din hîrtie

Paper capers de G e r a l d M. I, o e, Ireland Magic Co., 1955.

A Miscellany of Puzzles de Stephen Barr, Crowell, 1965. Cartea conține multe probleme inedite cu hîrtie tăiată
sau îndoită.

Equivalent and Equidecomposable Figures de V. G. Boltyanskii, D.C. Heath, 1963. O broșură tradusă din limba
rusă, după o ediție din 1956.

Geometric Dissections de Harry Bindgren, Van Nostrand, 1964. Lucrarea cea mai completă asupra subiectului.

6. Jocuri de masă

A History of Board Games other than Chess, de Harold James Ruthven

Murray, Oxford Press, 1952. Board and Table Games de R. C. Bell, Oxford Press, 1960.
 Asupra jocului Rithmomachy :
 Rithmomachia — marele joc medieval al numerelor de David Eugene Smith, și Clara C. Eaton, în Number Games and Number Rhymes, New York, Teachers College, Columbia University, 1914, pp. 29 — 38. Retipărit din „American Mathematical Monthly”, aprilie 1911.
 Jocul pitagoreic al lui Boissiere de John F. Childs, în „Scripta Mathematica”, voi. 12, nr. 3, septembrie 1946, pp. 177-217.
 Vechiul joc al Rithmomachiei de Charles Leete, în „Engineering and Science Review” (editată de Institutul Case), ianuarie 1960, pp. 18 — 20.
 Asupra șahului oriental:
 Korean Games, with Notes on the Corresponding Games of China and Japan de Stewart Cullin, University of Pennsylvania, 1895. Reeditată în 1958, sub titlul Games of the Orient, de Charles E. Tuttle.
 A Manual of Chinese Chess de Charles P. Williams, Yamato Press, San Francisco, 1952.
 Japanese Chess, the Game of Shogi de E. O'Hara, Bridgeway (Tuttle) Press, 1958. Asupra șahului „imaginativ” : Chess Eccentricities de maiorul George Hope Verney, Longmans, Green and Co., Londra, 1895. Cea mai bună lucrare în limba engleză.

86

■Șahul imaginativ de Maurice Kraitchik, în Mathematical Recreations, Dover, 1953, pp. 276-279.
 Variațiuni ale șahului de V. R. Parson, în „The New Scientist” (săptăminal englez), 27 mai 1965, p. 607.
 Les jeux d'echecs non orthodoxes de Joseph Boyer, publicată de autor. Paris, 1951.
 Nouveaux jeux d'echecs non orthodoxes de Joseph Boyer, publicată de autor, Paris, 1954.
 Les jeux de dames non orthodoxes de Joseph Boyer, publicată de autor. Paris, 1956.
 Asupra jocului reversi :
 A Handbook of Reversi, ed. Jacques & Son, 1888. O cărțuție cuprinzând reguli* jocului autorizată de Lewis Waterman și vîndută o dată cu jocul.
 The Handbook of Reversi, ed. F.H. Ayres, 1889. O altă cărțuție de reguli, scrisă de inventatorul rival John W. Moore și difuzată de producătorul rival al jocului.
 Reversi and Go Bang* de „Berkeley” (W. H. Peel), F.A. Stokes Co., New York, 1890. O carte de 72 de pagini, autorizată de Waterman. Cea mai bună lucrare asupra jocului.
 Reversi de Alice Howard Cady, American Sports Publishing Co., New York, 1896. O carte de 44 de pagini, în esență o ediție prescurtată a celei dinainte.
 Reversi de „Profesorul Hoffman” (Angelo Lewis), în The Book of Table Games, George Routledge and Sons, Londra, 1894, pp. 611—623.

7. Împachetarea sferelor

Într-o clipire din ochi de Edwin B. Matzke, în „Bulletin of the Torrey Botanical Club”, voi. 77, nr. 3, mai 1950, pp. 222-227.
 Împachetarea compactă și spuma de H. S. M. Coxeter, în „Illinois Journal of Mathematics”, voi. 2, nr. 48, 1958, pp. 746 — 758. Articolul cuprinde o bibliografie de 30 de lucrări mai vechi.
 Împachetarea sferelor egale de C. A. Rogers, în „Proceedings of the London Mathematical Society”, voi. 8, 1958, pp. 609-620.
 Umplerea spațiului cu sfere egale de H. S. M. Coxeter, în „Matematika”, voi. 6, 1959, pp. 147-157.

86

Împachetarea compactă a sferelor egale de H. S. M. Coxeter, în Introduction to-Geometry, Wiley, 1961, pp. 405 — 411. Împachetarea regulată simplă a sferelor, în trei dimensiuni de Ian Syma, în „Mathematics Magazine”, noiembrie 1963, pp. 295 — 300. Regular Figures de L. Fejes-Toth, Macmillan, 1964, pp. 288 — 307.

8. Numărul transcendent Pi

Famous Problems of Elementary Geometry de Felix Klein, Ginn and Co., 1897. Reeditată în 1930 de ed. Stechert; poate fi găsită în mod curent în ediție de buzunar (Dover).
 Istoria și transcendența lui Pi de David Eugene Smith, în Monographs on Topics of Modern Mathematics, editată de J.W.A. Young, Longmans, Green, 1911 ; ediție de buzunar Dover, 1955.
 Squaring the Circle : A History of the Problem de E. W. Hobson, Cambridge, 1913 ; Chelsea, 1953.
 Cvadratele cerului de Heinrich Tietze, în Famous Problems of Mathematics, capitolul 5, Graylock Press, 1965 (traducere după ediția germană revizuită din 1959). Lunga, lungă cale a lui Pi de Philip J. Davis, în The Lore of Large Numbers Kandom House New Mathematical Library, 1961, cap. 17. Numărul Pi de H. von Baravalle, în „Mathematics Teacher”, voi. 45, mai 1952, pp. 340-348.
 Circumetrica de Norman T. Gridgeman, în „The Scientific Monthly”, voi. 77, nr. 1, iulie 1953, pp. 31-35.

Asupra calculării zecimalelor lui Pi:

Contributions to Mathematics, comprising chiefly the rectification of the circle to 607 places of decimals de W i l l i a m S h a n k s. Londra, 1853. Prelucrare statistică a valorilor primelor 2000 de zecimale ale numerelor e ț i t t, obținute

la calculatorul ENIAC de N. C. M e t r o p o l i s, G. Reitwiesner și J.

von N e u m a n n, în Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 1950.

voi. 4, pp. 109-111.

Evoluția aproximărilor zecimale extinse pentru numărul Pi de J. W. V r e n c h, jr., în „The Mathematics Teacher”, decembrie 1960, pp. 644 — 649.

Calculul lui Pi cu 100 000 de zecimale de D a n i e l S h a n k s și J o h n W. Wrench, jr., în „Mathematics of Computation”, voi. 16, nr. 77, ianuarie 1962, pp. 76—99. Sînt incluse tabele care dau primele 100 000 de zecimale ale numărului Pi.

87

Asupra disputei dintre Hobbes și Wallis:

Certurile dintre Hobbes și dr. Wallis, matematicianul de Isaac Disraeli, in Ouarrels of Authors, Londra, 1814. Hobbes de George Crootn Robertson, William Blackwood, Londra, 1936, pp. 167-185.

The Mathematical Works of John Wallis de Joseph F. S'cott, Taylor and Francis, 1938.

9. Victor Eigen, matematicianul

Mathematics, Magic and Mystery de Martin Gardner, Dover, 1956. Mathematical Magic de William Simon, Scribner's, 1964.

Curbe închise care se autoînlesectează de Hans Rademacher și Otto Toeplitz, în Despre numere și figuri, Ed. Științifică, București, 1968, cap. 10.

10. Teorema hărții în patru culori

The Four Color Problem de Philip Franklin, în „Scripta Mathematica Library”, nr. 5, 1941.

Ce este matematica? de Richard Courant și Herbert Robbins,

Ed. Științifică, București, 1969. Vezi Problema celor patru culori, pp. 263 — 264 ;

Teorema celor cinci culori, pp. 281 — 283. Problema regiunilor vecine, problema coardei și problema culorilor de David Hilbert

și S. Cohn-Vossen, în Geometry and the Imagination, Chelsea, 1952 (tradusă

după ediția germană din 1932), pp. 333 — 340. Problema celor patru culori de Hans Rademacher și Otto Toeplitz, în

Despre numere și figuri, Ed. Științifică, București, 1968, cap. 12. Introduction to Geometry de H. S. M.

Coxeter, Wiley, 1961, pp. 385 — 395. Intuitive Concepts in Elementary Topology de BradfordHenry Arnold, Prentice-Hall, 1962. Vezi Problema celor patru culori, pp. 43 — 55; Teorema celor

șapte culori pe un tor, pp. 85—87.

Colorarea hărților de Sherman K. Stein, în Mathematics: The Man-made Uni-

verse, W. H. Freeman, 1963, pp. 175-199. Colorarea hărților de Oystein Ore, în Grafele și aplicațiile lor, Ed. Științifică,

București, 1968.

87

Induction in Geometry de T. I. G o l o v i n a și I. M. Y a g l o m DC Heath 1963 pp. 22-44.

Famous Problems of Mathematics de Heinrich Tietze, Graylock Press 1965

(traducere după ediția germană din 1959). Vezi Despre domeniile vecine, pp. 64-89 •

Problema celor patru culori, pp. 226—242. Probleme de colorare a hărților de H. S. M. Coxeter, în „Scripta Mathematica”

voi. 23, nr. 1-4, 1957, pp. 11-25. Colorarea hărților de un colectiv de la Facultatea de matematică a Universității din

Chicago, în „Mathematics Teacher”, decembrie 1957, pp. 546—550. Problema hărții în patru culori, 1840—1800 de H. S. M. Coxeter, în „Mathematics

Teacher”, aprilie 1959, pp. 283-289. Insula celor cinci culori de Martin Gardner, în Future Tense, o lucrare editată

de Kendell Foster Crossen, Greenberg, 1952; reeditată în Fantasia Mathematica,

editată de Clifton Fadiman, Simon and Schuster, 1958.

13. Poliominouri și dreptunghiuri perfecte

Poliominourile de Martin Gardner, în The „Scientific American” Book of Mathematical Puzzles and Diversions, Simon and Schuster, 1959, cap. 13*.

Polyominoes de Solomon W. Golomb, Scribner's, 1965. O listă bibliografică de la sfîrșitul cărții citează toate referințele importante din cărți sau reviste.

14. Defăimătorii lui Euler

Problema celor 36 de ofițeri de G. T a r r y, în „Comptes Rendus de l'Association fran-çaise pour l'avancement des sciences naturelles”, voi. 1, 1900, pp. 122—123; voi. 2, 1901, pp. 170-203.

Asupra falsității conjecturii lui Euler despre inexistența a două pătrate latine ortogonale de ordinul $4t + 2$ de R.J C. Bose și S. S. Shrikhande, în „Proceedings of the National Academy of Sciences”, voi. 45, nr. 5, mai 1959, pp. 734 — 737.

Pătrate latine ortogonale de E. T. Parker, în „Proceedings of the National Academy of Sciences”, voi. 45, nr. 6, iunie 1959, pp. 859-862.

O importantă conjectură matematică propusă acum 177 de ani este infirmată de John A. O s m u n d s e n, în „New York Times” din 26 aprilie 1959, p. 1.

88

Asupra construcției unor seturi de pătrate latine reciproc ortogonale și falsității conjecturii lui Euler de R. C. Bose și S. S. Shrikhande, în „Transactions of the American Mathematical Society”, voi. 95, 1960, pp. 191—209.

Noi rezultate în construcția unor pătrate latine reciproc ortogonale și falsitatea conjecturii lui Euler de R. C.

Bose, S. S. Shrikhande și E. % Parker, în „Canadian Journal of Mathematics”, voi. 12, 1960, pp. 189 — 203.

Un studiu cu ajutorul calculatorului al pătratelor latine ortogonale de ordinul 10 de E. T. Parker, in „Computers and Automation”, august 1962, pp. 1—3.

Tabele ortogonale de Sherman K. Stein, în Mathematics : The Man-made Vniverse, W. H. Freeman, 1963, cap. 12.

Pătrate latine ortogonale de Herbert John Ryser, în Combinatorial Mathematics, Mathematical Association of America, 1963, cap. 7.

Asupra planurilor proiective finite:

Aritmetica finită și gcometriile de W. W. S a w y e r, în Prelude to Mathematics, Penguin, 1955, cap. 13.

Planurile finite și pătratele latine de Truman Botts, în „Mathematics Teacher”

mai 1961, pp. 300-306. Planuri finite, pentru elevi de A. A. A l b e r t, în „Mathematics Teacher”, martie 1962, pp. 165-169.

Planul proiectiv general și planurile proiective finite de H a r o l d L. Dorwart, in The Geometry of Incidence, Prentice-Hall, 1966, sect. IV.

Asupra folosirii pătratelor greco-latine în planificarea experimentelor :

Analysis and Design of Experiments de H. B. M a n n, Dover, 1949. The Design of Experiments de R. A. F i s h e r, Hafner, 1951.

Experimental Design and Its Statistical Basis de David John Finney, Univer-

sity of Chicago Press, 1955. Planning of Experiments de D. R. C o x, John Wiley & Sons, 1958.

15. Elipsa

Curbele și suprafețele cele mai simple de David Hilbert și S. Cohn-Vossen,

în Geometry and the Imagination, Chelsea, 1956, pp. 1 — 24. A Book of Curves de E. H. Lockwood,

Cambridge TJniversity Press, 1961.

88

Ceva nou în legătură cu mingea-8* de Ronald Bergman, în „Recreațional Mathe maties Magazine”, ianuarie-februarie 1964, pp. 17—19. Asupra jocului Elliptipool

16. Cele 24 de pătrate colorate și 30 de cuburi colorate

New Mathematical Pastimes de Percy Alexander MacMahon, Cambridge University Press, 1921.

Das Spiel der 30 Bunten Wilrfel de Ferdinand W inter, Leipzig, 1934. O broșură de 128 de pagini, consacrată în întregime celor 30 de cuburi colorate.

Mathematical Recreation de M aurice Kraitchik, Dover, 1953. Vezi la p. 312 un joc care folosește 30 de pătrate care epuizează aranjamentele a patru din cinci culori, iar la p. 313 câteva probleme cu șaisprezece pătrate care epuizează aranjamentele a două culori din opt.

ProbUma cuburilor colorate de W. R. Rouse B a 11, în Mathematical Reccrations and Essays, ediție revăzută, Macmillan, 1960, pp. 112—114.

Blocuri colorate și Construcții cu blocuri colorate de Aniela Ehrenfeucht, în The Cube Made Interesting, Pergamon Press, 1964, pp. 46 — 66. Cartea este o traducere după ediția în limba polonă din 1960.

Construcții cu cuburi colorate de Paul B. Johnson, in „American Mathematical Monthly”, voi. 63, nr. 6., iunie-iulie 1956, pp. 392-395.

Cubeb de L. Vosburgh L y o n s, în Ibidem, nr. 12, decembrie 1957, pp. 8 — 9.

Poliedre colorate — o problemă de permutări de Clarence R. Peri s ho, în „Mathematics Teacher”, voi. 35, nr. 4, aprilie 1960, pp. 253 — 255.

18. Jocul lui Gale și alte jocuri

Despre jocul lui Cale :

The 2nd „Scientific American” Book of Mathematical Puzzles and Diversions** de Martin Gardner, Simon and Schuster, 1961, pp. 84-87**.

O soluție a jocului lui Shannon de Alfred Lehman, in „Journal of the Society of Industrial Applied

Mathematics", voi. 12, nr. 4, decembrie 1964, pp. 687 — 725.

Asupra jocului halma :

The Book of Table Games de „Profesorul H o f f m a n n" (A n g e l o Lewis), George Routledge and Sons, 1894, pp. 604-607.

89

A History of Board Games de H. J. R. M u r r a y, Oxford University Press, 1952, pp. 51-52.

20. Calculul cu diferențe finite

The Calculus of Finite Differences de Charles Jordan, Chelsea, 1947. Numericul Calculus de William Edmunds Milne, Princeton University Press, 1949.

The Calculus of Finite Differences de L. M. Milne-Thomson, Macmillan, 1951. An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations de K e n -n e t h S. Miile*, Henry Hoit, 1960.